MATEMATIKA PRO LINGVISTY

Jiří Rohn

UNIVERSITA KARLOVA • PRAHA

UNIVERSITA KARLOVA

MATEMATIKA PRO LINGVISTY

Jiří Rohn

PRAHA 1974

Katedra základů matematické analýzy matematicko-fyzikální
fakulty University Karlovy
Vedoucí: doc. RNDr. Ilja Černý, CSc.

Předmluva

Toto skriptum, které vzniklo na základě několika přednášek o matematice pro lingvisty, které jsem měl v zimním semestru škol. r. 1972/73 na semináři katedry věd o zemích Asie a Afriky FFKU, si klade za cíl, poskytnout zájemci o matematickou lingvistiku z řad lingvistů základní informace o matematických pojmech, s nimiž se v matematické lingvistice pracuje. Není míněno jako učebnice matematické lingvistiky, ale má být pouze pomůckou pro čtení odborné literatury z tohoto oboru. Nepředpokládá žádné předběžné matematické znalosti.

První dva oddíly se zabývají výrokovou a predikátovou logikou. Ne všechno, co je v nich obsaženo, se používá v dalším; úmyslně jsem tento text poněkud rozšířil s ohledem na časté dotazy na logické zákony, které bývají v této souvislosti kladeny. Nejdůležitější částí skript jsou oddíly 3 a 4, v nichž jsou vyloženy základní pojmy teorie množin. Oddíl o grafech je přidán pro úplnost. V poslední části je pro ilustraci uvedena definice generativní gramatiky a pojmy s tím související.

Děkuji dr. J. Vackovi, který přečetl větší část skript a pomohl mi odstranit mnohé nejasnosti v textu. Můj dík patří rovněž paní A. Fučíkové za pečlivé přepsání skript na stroji a ing. J. Sommrovi, který nakreslil obrázky.

J. R.

1. Výroková logika

Dříve než přistoupíme k výkladu základní matematické disciplíny, totiž teorie množin, na jejímž základě je vybudována celá moderní matematika, musíme nejprve osvětlit některé logické pojmy, bez jejichž znalosti není dnes možné číst žádný matematický text.

Tradiční způsob výkladu logiky, kterého se přidržovala ještě předválečná gymnázia, přispěl značně k tomu, že ještě dodnes si ji mnozí lidé představují jako vědu o správných úsudcích, sylogismech, definicích atd. Ve skutečnosti je moderní logika silně proniknuta matematickými metodami, takže se někdy místo termínu "logika" používá i termínů "symbolická logika" nebo "matematická logika". Tento nynější stav logiky je výsledkem více než stoletého vývoje, který započal v pracích anglického logika G. Boolea (1815 - 1910).

Základní (a nejjednodušší) disciplínou moderní logiky je výroková logika, nazývaná někdy též "výrokovým počtem" nebo "výrokovým kalkulem". Zabývá se - stručně řečeno - spojováním vět v souvětí a zjišťováním pravdivosti či nepravdivosti souvětí na základě pravdivosti či nepravdivosti jednotlivých jeho členů. Můžeme tedy z lingvistického hlediska pohlížet na výrokovou logiku jako na první a nejhrubší stupeň rozboru věty.

Vzhledem k tomu, že slovo "věta" má v logických a matematických textech specifický význam, totiž význam matematického tvrzení neboli teorému, používá se místo něj v logických textech slovo "výrok". Protože jde o základní pojem celého odvětví logiky, je nutno vymezit jej co možná nejpřesněji, abychom odstranili mnohoznačnost, kterou toto slovo v sobě skrývá v běžném jazyce.

Výrokem budeme rozumět větu (tvrzení, výpověď atd.), o které lze rozhodnout, zda je či není pravdivá. Tak například české věty

"Praha je hlavní město Československa",

"Praha není hlavní město Československa"

jsou výroky, protože o každé z nich lze říci, zda je či není pravdivá. Naproti tomu jakýkoli nesmyslný souhrn slov, např.

"Číslo Plzeň je zelené",

není výrokem, protože o jeho pravdivosti nebo nepravdivosti nelze nic rozumného říci.

Je důležité připomenout, že uvedené definici výroku nelze podkládat subjektivní výklad. Slova "lze rozhodnout" zde nemají nic společného se subjektivním hodnocením pravdivosti či nepravdivosti výroku osobou mluvčího, ale jsou míněna v tom smyslu, že daný výrok zaručeně je buď pravdivý nebo nepravdivý. Například tvrzení

"Na Marsu existuje život"

je jistě buď pravdivé nebo nepravdivé, a tedy je výrokem, ačkoliv dosud nevíme, která z obou těchto možností odpovídá skutečnosti.

Pro naše účely je rozhodující skutečnost že o každém výroku můžeme říci, že buď je pravdivý nebo že je nepravdivý a připsat mu tzv. pravdivostní hodnotu. Tuto pravdivostní hodnotu výroku budeme značit symbolem 1 , je-li výrok pravdivý, a symbolem 0 , je-li výrok nepravdivý. Podotkněme hned zde, že čísla 1 a 0 , kterých jsme použili, jsou pouze konvenčně používané symboly, které nemají nic společného s jejich číselnými hodnotami a vlastnostmi. Stejně tak bychom mohli (jak se to také někdy dělává) používat pro pravdivost symbolu P a pro nepravdivost symbolu N .

V běžné řeči často spojujeme jednoduché věty do složitějších celků; k tomu používáme tzv. větných spojek. Některé z nich, totiž spojky "není pravda, že", "a", "nebo", "jestliže ..., pak" a méně častá spojka "jen tehdy, když", mají ve výrokové logice zvláštní úlohu. Probereme je proto nyní podrobněji.

Nechť máme dán nějaký výrok, označme ho symbolem p . Výrok "není pravda,že p " nazýváme negací výroku p a značíme ho $\neg p$. Například, je-li p výrok

"Dnes prší",

bude jeho negací výrok

"Není pravda, že dnes prší".

(Tento výrok nám zní trochu podivně, protože v běžné řeči bychom jistě řekli "Dnes neprší". Zde se poprvé setkáváme s okolností, že pro vystižení logické struktury věty běžného hovorového jazyka je často třeba použít vyjádření, které zní dosti těžkopádně. Například v uvedeném příkladě je tato těžkopádnost způsobena tím, že v češtině, podobně jako ve většině jiných jazyků, se zápor staví ke slovesu, tedy doprostřed věty, zatímco náš způsob zápisu ve tvaru $\neg p$ vyznačuje zápor na začátku.)

Povšimněme si, že je-li výrok p pravdivý, je výrok $\neg p$ nepravdivý a naopak, je-li výrok p nepravdivý, je jeho negace $\neg p$ pravdivá. Tuto zřejmou skutečnost můžeme shrnout následující tabulkou:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Zde máme v prvním sloupci uvedeny všechny možné pravdivostní hodnoty výroku p (totiž $0, 1$) a ke každé této hodnotě je na stejném řádku ve druhém sloupci uvedena pravdivostní hodnota výroku $\neg p$. Podobné tabulky - i když trochu složitější - sestrojíme i pro další výrokové spojky.

Přejděme nyní ke spojce "a". Výrok

"Dnes prší a je zima"

konstatuje zřejmě nezávisle na sobě dvě skutečnosti: 1) Dnes prší, 2) Je zima. Označíme-li výrok "Dnes prší" symbolem p , výrok "Je zima" symbolem q , označíme výrok "Dnes prší a je zima" symbolem $p \wedge q$ a budeme jej nazývat <u>konjunkcí</u> výroků p, q . Daný výrok jsme tedy složili ze dvou výroků, spojených navzájem spojkou "a", které v symbolickém zápisu odpovídal symbol " $\wedge$ ". Je důležité si uvědomit, že zatímco negace se vztahovala k jedinému výroku, operuje konjunkce (stejně jako všechny spojky, se kterými se setkáme v dalším) se dvěma výroky, které mohou být na sobě zcela nezávislé. Příkladem takového spojení je výrok

"Opice je savec a Praha není hlavní město Československa", kde jde o spojení dvou na sobě zcela nezávislých výroků; pro nás však je podstatné, že uvedený výrok má logickou formu konjunkce.

Nyní musíme vyjasnit otázku, jak závisí pravdivostní hodnota výroku $p \wedge q$ na pravdivostních hodnotách jeho složek p, q. Protože výroky p, q jsou na sobě nezávislé, jsou možné tyto čtyři případy: 1) p je pravdivý, q je pravdivý; 2) p je pravdivý, q je nepravdivý; 3) p je nepravdivý, q je pravdivý; 4) p je nepravdivý, q je nepravdivý. Jestliže je výrok $p \wedge q$, například "Dnes prší a je zima", pravdivý, potom konstatuje skutečnost, že platí dvě věci: 1) Dnes prší, 2) Je zima. To znamená, že je-li výrok $p \wedge q$ pravdivý, jsou i oba výroky p, q pravdivé. Naopak, jestliže některý z výroků p, q není pravdivý, např. jestliže dnes neprší, pak výrok "Dnes prší a je zima" nemůže být pravdivý; tím spíše nebude pravdivý, jestliže oba výroky, z nichž je složen, budou nepravdivé. Docházíme tedy k tomuto závěru: výrok $p \wedge q$ je pravdivý jen tehdy, jsou-li oba výroky p, q pravdivé; ve všech ostatních případech je nepravdivý. Použijeme-li opět pro pravdivost symbolu 1, pro nepravdivost symbolu 0, můžeme naše úvahy shrnout touto tabulkou:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Zde jsou v prvních dvou sloupcích uvedeny všechny možné kombinace pravdivostních hodnot výroků p, q a u každé z těchto kombinací je ve stejném řádku a třetím sloupci uvedena pravdivostní hodnota výroku $p \wedge q$.

Výrok, který vznikne spojením výroků p, q spojkou "nebo", například

"Dnes večer budu číst nebo půjdu do kina",

nazýváme <u>disjunkcí</u> výroků p, q a značíme jej $p \vee q$. Výroky p, q mohou být opět (co se jejich pravdivostních hodnot týče) na sobě nezávislé. V hovorovém jazyce však spojky "nebo" používáme, většinou nevědomky, ve dvou různých smyslech. Srovnejme uvedenou větu s větou

"Zítra v poledne bude buď v Praze nebo v Bratislavě".

V první z těchto vět se tvrdí, že dnes večer buď budu číst, nebo půjdu do kina, avšak nevylučuje se, že mohu udělat obojí, např. večer napřed jít do kina a potom číst. Naproti tomu druhá věta uvádí, že zítra v poledne bude dotyčná osoba buď v Praze, nebo v Bratislavě, avšak tyto dvě okolnosti nemohou platit současně. Rozdíl mezi oběma těmito větami tkví tedy v tom, že je-li první věta pravdivá, znamená to, že je pravdivá první nebo druhá její složka nebo obě současně, zatímco je-li druhá věta pravdivá, pak jedna z jejích složek je pravdivá a druhá nepravdivá, avšak nemohou být obě pravdivé současně. Aby se vyloučila tato dvojznačnost, která by ve formálních logických nebo matematických textech mohla vést k omylům, bylo dohodnuto chápat logickou spojku " $\vee$ " vždy v tzv. nevylučovacím smyslu, tj. ve smyslu prvního z obou uvedených příkladů, tedy výrok " $p \vee q$ " znamená "buď platí p nebo platí q nebo platí p i q současně". Výrok " $p \vee q$ " je tedy pravdivý jen v těch případech, kdy aspoň jeden z výroků p, q je pravdivý. Tabulka, znázorňující pravdivostní hodnoty disjunkce, bude mít proto tento tvar:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Výrok typu "jestliže p, pak q", který můžeme také vyjádřit v rozvinutějším tvaru "jestliže platí p, pak platí q", nazýváme implikací a značíme $p \Longrightarrow q$. První člen implikace (výrok p) se nazývá předpoklad, druhý člen (výrok q) tvrzení (ve starší literatuře se používá názvů antecedent, konsekvent). Například u výroku

"Jestliže bude zítra pršet, pak zůstaneme doma"

je výrok "zítra bude pršet" předpokladem, výrok "zůstaneme doma" tvrzením. Implikace je nejčastěji používanou logickou spojkou. Její důležitost je dána tím, že tato spojka charakterizuje tzv. logické vyplývání (logickou závislost); znamená to, že jakmile výrok $p \Longrightarrow q$ je pravdivý, pak pravdivost výroku p zaručuje pravdivost výroku q. Naprostá většina matematických vět má formu implikace. Uveďme několik příkladů:

1) jsou-li a, b kladná čísla, pak $a + b$ je kladné číslo,

2) je-li ABC pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c, pak $c^2 = a^2 + b^2$ (Pythagorova věta),

3) jestliže x, y jsou kladná čísla, pak $\log(xy) = \log x + \log y$.

V matematických textech bývá implikace vyjadřována i některými jinými ustálenými slovními obraty. Výrok

$$" p \Longrightarrow q "$$

bývá čten též takto:

"z p vyplývá q " ,

" p implikuje q " ,

" p je postačující podmínka pro q " ,

" q je nutná podmínka pro p " (protože z p nutně plyne q).

Pokusme se nyní sestavit tabulku pravdivostních hodnot výroku " $p \Longrightarrow q$ ". Vezměme opět náš příklad

"Jestliže bude zítra pršet, pak zůstaneme doma".

Tento výrok konstatuje logickou závislost (podmíněnost): bude-li zítra pršet, je jisté, že zůstaneme doma. Kdy bude tento výrok nepravdivý? Zřejmě jedině tehdy, jestliže zítra bude pršet a my přesto doma nezůstaneme. Vrátíme-li se k obecnému případu výroku " $p \Longrightarrow q$ ", můžeme tedy říci, že tento výrok bude nepravdivý jedině tehdy, jestliže předpoklad p bude pravdivý a tvrzení q nepravdivé. Při všech ostatních pravdivostních hodnotách výroků p, q bude implikace " $p \Longrightarrow q$ " pravdivá. To znamená, že implikace je dána touto tabulkou:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Povšimněme si v tabulce jedné zarážející okolnosti: jestliže výrok p je nepravdivý, pak výrok " $p \Longrightarrow q$ " je pravdivý bez ohledu na to, jakou pravdivostní hodnotu má výrok q .

To bývá často vyjadřováno lapidárním výrokem: "Z nepravdy plyne cokoli". Této okolnosti můžeme dát ještě jinou formulaci: Je-li výrok "$p \Longrightarrow q$" pravdivý a výrok p je nepravdivý, pak o pravdivosti výroku q nelze nic říci. Můžeme to opět ilustrovat na našem příkladě. Tvrdíme v něm, že bude-li zítra pršet, pak zůstaneme doma. Netvrdíme však přitom nic o tom, co uděláme, jestliže pršet nebude. Jestliže se tedy stane, že zítra nebude pršet, pak z daného výroku nelze zjistit, zda doma zůstaneme či ne, protože na tento případ se naše tvrzení nevztahuje.

Poslední spojka, kterou probereme, je <u>ekvivalence.</u> Hraje ve výrokové logice asi takovou roli, jakou hraje rovnost v aritmetice. Tak jako rovnost dvou čísel znamená, že tato čísla mají stejnou hodnotu, znamená ekvivalence dvou výroků, že tyto dva výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu, čili že jsou oba buď současně pravdivé, nebo současně nepravdivé. Ekvivalenci výroků p, q zapisujeme "$p \Longleftrightarrow q$" a čteme "p je ekvivalentní q" nebo (v matematických textech) "p <u>právě když</u> q". Nejčastěji se ekvivalence vyskytuje v definicích. Každá definice má totiž tvar ekvivalence. Například:

"Trojúhelník je rovnoramenný právě když dvě z jeho stran mají stejnou délku"

(definice rovnoramenného trojúhelníka). V běžné řeči se ekvivalence vyskytuje řidčeji a je obvykle vyjadřována jinými slovními obraty, např.

"Půjdu tam, jedině když tam půjdeš ty."

Ekvivalence výroků p, q, jak je patrno z uvedených příkladů, je tedy pravdivá jedině tehdy, jsou-li oba současně buď pravdivé, nebo nepravdivé a je nepravdivá, jestliže jeden z výroků p, q je pravdivý a druhý nepravdivý; to vyjádříme touto tabulkou:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Cvičení 1. Určete, které z uvedených spojek se vyskytují v následujících větách.

1) Karel s Vlastou šli na fotbal,

2) Pojede-li tramvaj normálně, budeme tam včas,

3) Ten člověk je buď blázen nebo génius.

Pomocí uvedených pěti logických spojek můžeme vystihnout logickou strukturu prakticky všech vět běžného jazyka.
Mějme například větu

"Bude-li o víkendu pršet,půjdeme do kina nebo do divadla".

Slovo "bude-li" uvozuje jistý předpoklad a naznačuje tedy implikaci. Můžeme proto přepsat větu v této formě:

"Jestliže o víkendu bude pršet, pak půjdeme do kina nebo do divadla".

Označíme-li výrok "O víkendu bude pršet" symbolem p a výrok "Půjdeme do kina nebo do divadla" symbolem q, můžeme logickou strukturu věty zachytit výrazem

$$p \Longrightarrow q \, .$$

Zatímco výrok p nelze už z hlediska výrokové logiky rozložit na jednodušší složky, má zřejmě výrok q, který lze přepsat ve tvaru

"Půjdeme do kina nebo půjdeme do divadla",

formu disjunkce $r \vee s$, kde symbolem r je označen výrok "půjdeme do kina" a symbolem s výrok "půjdeme do divadla". Logickou strukturu původní věty můžeme tedy vyjádřit výrazem

$$p \Longrightarrow (r \vee s) .$$

Zde je nutné výrok $r \vee s$ dát do závorky, aby tím bylo naznačeno, že celý tento výrok je tvrzením (konsekventem) implikace. Stejný výrok bez závorek, tj. výraz

$$p \Longrightarrow r \vee s ,$$

by totiž bylo možno chápat jako výrok

$$(p \Longrightarrow r) \vee s ,$$

tj.

"Půjdeme do divadla nebo bude-li o víkendu pršet, půjdeme do kina",

který má evidentně jiný význam než výrok, z něhož jsme vycházeli.

Jiný příklad: větu

"Přijdu tam, jedině když přijdou i Jirka s Ivanem",

rozepíšeme-li ji do názornější formy

"Přijdu tam právě když přijde Jirka a přijde Ivan",

můžeme vystihnout výrazem

$$p \Longleftrightarrow (q \wedge r) .$$

V podobných příkladech bychom mohli pokračovat.

Výrazy tvaru $p \Longrightarrow (r \vee s)$, $p \Longleftrightarrow (q \wedge r)$, $p \Longrightarrow ((\neg q) \Longrightarrow r)$, $(p \wedge q) \Longrightarrow p$, $\neg (p \vee s)$ apod. nazýváme <u>výrokovými formu-</u>

lemi nebo krátce formulemi. Jde o výroky, které jsou složeny z určitého počtu jednoduchých výroků (ozn. p, q, r, s atd.) a spojek $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$. Ne každé z možných spojení těchto symbolů je však výrokovou formulí; například výrazy

$$p \Longrightarrow \neg \quad ,$$
$$(p \vee) \wedge r \quad ,$$

nejsou formulemi. Jsou totiž utvořeny nesprávně a z logického hlediska zcela nesmyslně. První z nich říká, že z platnosti výroku p plyne nepravdivost, není však řečeno, čeho. Podobně ve druhém výrazu chybí pravý člen disjunkce. Aby se dalo přesně rozlišit, co je a co není výrokovou formulí, zavádí se následující definice:

Definice výrokové formule:

1) Každý jednoduchý výrok (tj. p, q, r atd.) je výroková formule,

2) jsou-li A, B výrokové formule, pak

$$\neg A \quad ,$$
$$A \vee B \quad ,$$
$$A \wedge B \quad ,$$
$$A \Longrightarrow B \quad ,$$
$$A \Longleftrightarrow B \quad ,$$

jsou výrokové formule,

3) neexistují výrokové formule, které by byly utvořeny jinak, než jak je uvedeno v 1), 2), tj. každá výroková formule je buď jednoduchý výrok nebo negace výrokové formule nebo vznikne spojením dvou výrokových formulí některou ze spojek $\vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$.

Na základě této definice můžeme nyní ověřit, proč např. výraz

$$p \Longleftrightarrow (q \wedge r)$$

je výrokovou formulí (krátce: formulí), kdežto výraz

$$p \Longrightarrow \neg$$

jí není. Podle bodu 1) definice jsou p, q, r formule. Potom podle bodu 2) je $q \wedge r$ formule a jelikož nyní každý z výrazů p, $q \wedge r$ je formule, je opět podle 2) výraz $p \Longleftrightarrow (q \wedge r)$ formule.

Kdyby výraz $p \Longrightarrow \neg$ byl formulí, musel by podle bodu 3) být buď jednoduchým výrokem, což není pravda, nebo negací výrokové formule, což také není pravda, neboť na začátku tohoto výrazu nestojí symbol negace, nebo by musel vzniknout ze dvou výrokových formulí spojením některou ze spojek $\vee$, $\wedge$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$. Náš výraz má formu implikace, proto by obě její části, tj. p a $\neg$, musely být formulemi. Výraz " p " je sice formulí, avšak výraz " $\neg$ " nikoli, neboť samostatně stojící symbol může být podle 1) formulí jedině tehdy, je-li to symbol výroku. Proto výraz $p \Longrightarrow \neg$ není formule.

Cvičení 2. Zapište symbolicky logickou strukturu následujících souvětí.

1) Není-li pravda, že Karel a Josef jsou posluchači 3. ročníku, pak aspoň jeden z nich není posluchačem 3. ročníku,

2) zítra bude zataženo a jestliže se neochladí, začne pršet.

Cvičení 3. Zjistěte, zda následující výrazy jsou či nejsou výrokovými formulemi.

1) $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow (\neg p))$, 2) $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$,

3) $(\neg \vee) \Longrightarrow (p \wedge q)$, 4) $(\neg(\neg p)) \Longrightarrow q$,

5) $pq \Longrightarrow r$.

Všechny výrokové formule je možno rozdělit do dvou skupin. Povšimněme si těchto dvou formulí:

$$p \Longrightarrow (r \vee s) ,$$
$$(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q) .$$

Pravdivost první z nich je závislá na tom, jakou pravdivostní hodnotu mají výroky p, r, s. Jsou-li výroky p, r, s pravdivé, je i výrok $p \Longrightarrow (r \vee s)$ pravdivý. Je-li však výrok p pravdivý, kdežto výroky r, s nepravdivé, je výrok $p \Longrightarrow (r \vee s)$ nepravdivý. Naproti tomu se ukazuje, že výrok $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$ je pravdivý vždy a za všech okolností, ať jsou p, q jakékoliv výroky s jakýmikoliv pravdivostními hodnotami. Snadno to nahlédneme, uvědomíme-li si, že tento výrok tvrdí v podstatě triviální fakt, že platí-li současně p a q, platí i některý z výroků p, q (což je ovšem pravda, neboť platí dokonce oba). Rozdíl mezi oběma uvedenými výrokovými formulemi můžeme vystihnout slovy, že pravdivost první z nich závisí na kontextu, kdežto pravdivost druhé je na něm zcela nezávislá.

Předmětem výrokové logiky je právě studium výrokových formulí druhého typu, tedy formulí, které představují výroky, jež jsou vždy pravdivé nezávisle na pravdivostních hodnotách výroků, z nichž jsou složeny. Tyto všeobecně platné formule jsou vzhledem k universálnosti svého použití jakýmisi normami správného (logického) usuzování a jsou často nazývány logickými zákony. Uveďme ještě některé z nich:

$$p \vee (\neg p)$$

(každý výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý)

$$\neg(p \wedge (\neg p))$$

(nemůže se stát, že by nějaký výrok současně platil a neplatil)

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$$

(neplatí-li výroky p, q současně, pak aspoň jeden z nich neplatí)

$$(p \wedge q) \Longrightarrow (q \wedge p)$$

(platí-li p a q, pak platí i q a p)

$$(\neg(\neg p)) \Longleftrightarrow p$$

(dvojí negací se pravdivost výroku nemění)

atd.

Zamyslíme-li se nad uvedenými logickými zákony, dojdeme k závěru, že jsou vlastně pouhým formálním vyjádřením principů, jimiž se řídíme při svém usuzování v běžném životě. Uvedené příklady jsou ovšem dosti jednoduché. Těžko bychom na první pohled mohli rozhodnout, zda formule

$$(p \Longrightarrow (\neg r \vee \neg s)) \Longleftrightarrow ((r \wedge s) \Longrightarrow \neg p)$$

je logickým zákonem. Vzniká proto přirozená otázka, zda existuje nějaký způsob, který by nám umožnil o každé formuli rozhodnout, zda je logickým zákonem (tj. zda je všeobecně platná), či nikoliv. Taková metoda, navíc velmi jednoduchá, skutečně existuje a je nazývána tabulkovou metodou, protože využívá tabulek pravdivostních hodnot logických spojek, které jsme uvedli výše.

Její základní myšlenka je velmi jednoduchá. Řekli jsme, že logickými zákony rozumíme takové formule, které jsou vždy pravdivé, ať je pravdivost výroků, z nichž se skládají, jakákoliv. K tomu, abychom mohli říci, že daná formule je logickým zákonem, stačí proto ukázat (ověřit), že při libovolném dosazení nul a jedniček (tj. pravdivostních hodnot) za jednoduché výroky, z nichž je formule složena, má vždy celá formule pravdivostní hodnotu 1 .

Ověříme uvedeným způsobem, že formule

$$p \vee (\neg p)$$

je logickým zákonem. Výrok p může být buď pravdivý, nebo nepravdivý, máme tedy dvě možnosti: 1) hodnota p je 1 : pak (podle výšeuvedené tabulky pro negaci) hodnota $\neg p$ je 0 a podle tabulky pro disjunkci (2. řádek, tedy první člen disjunkce má hodnotu 1 a druhý hodnotu 0) hodnota výroku $p \vee (\neg p)$ je 1 ; 2) hodnota p je 0 : pak hodnota $\neg p$ je 1 a podle tabulky pro disjunkci (3. řádek) hodnota $p \vee (\neg p)$ je 1 .

Naše úvahy zachytíme přehledně ve formě tabulky, v níž každý z obou uvedených kroků je zachycen v samostatném řádku:

p	¬p	p∨(¬p)
1	0	1
0	1	1

Jak vidíme, je hodnota výroku $p \vee (\neg p)$ vždy 1 , ať je počáteční pravdivostní hodnota výroku p jakákoliv, takže výrok $p \vee (\neg p)$ je logickým zákonem.

Cvičení 4. Ověřte tabulkovou metodou, že formule $\neg(p \wedge (\neg p))$, $(\neg(\neg p)) \Longleftrightarrow p$, $(p \Longrightarrow \neg p) \Longrightarrow \neg p$ jsou logickými zákony.

Obsahuje-li výroková formule dvě proměnné (např. p, q), bude tabulka trochu větší, protože, jak víme, existují celkem čtyři možné kombinace pravdivostních hodnot těchto proměnných. Dejme tomu, že bychom měli ověřit, že formule

$$(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$$

je logickým zákonem. Musíme probrat všechny čtyři možnosti. První z nich je, že oba výroky p, q mají (pravdivostní) hodnotu 1 . Pak (podle tabulky pro konjunkci, 1. řádek) má $p \wedge q$ hodnotu 1 , podobně podle 1. řádku tabulky pro disjunkci má $p \vee q$ hodnotu 1 , tedy antecedent i konsekvent mají hodnotu 1 , takže podle tabulky pro implikaci má $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$ hodnotu 1 . V praxi ovšem postupujeme tak, že neprovádíme tyto úvahy verbálně, ale zapisujeme příslušné hodnoty rovnou do tabulky. Celá tabulka pro naši formuli pak vypadá takto:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Protože poslední sloupec tabulky je složen ze samých jedniček, je uvedená formule logickým zákonem; kdyby se aspoň na jednom místě posledního sloupce objevila nula, nebyl by výrok všeobecně platný a tudíž by logickým zákonem nemohl být.

Uvedeme ještě tabulky dvou jiných logických zákonů:

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow ((\neg q) \Longrightarrow (\neg p)) ,$$

$$(\neg(p \wedge q)) \Longleftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q)) .$$

p	q	¬q	¬p	p⇒q	(¬q)⇒(¬p)	(p⇒q)⇔((¬q)⇒(¬p))
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

p	q	p∧q	¬(p∧q)	¬p	¬q	(¬p)∨(¬q)	(¬(p∧q))⇔((¬p)∨(¬q))
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

První z těchto zákonů je jedním z nejdůležitějších logických zákonů vůbec. Říká se mu někdy "zákon obrácení implikace". Máme-li výrok "$p \Longrightarrow q$", např.

"Jestliže prší, pak je nízký tlak",

pak implikace "$q \Longrightarrow p$" (obrácená implikace) obecně není pravdivá. Skutečně výrok

"Jestliže je nízký tlak, pak prší"

není pravdivý, protože ne vždy při nízkém tlaku musí pršet. Zákon obrácení implikace však tvrdí, že z pravdivé implikace "$p \Longrightarrow q$" dostaneme pravdivou implikaci, jestliže tuto implikaci obrátíme a navíc oba její členy znegujeme (tedy $\neg q \Longrightarrow \neg p$). V našem případě tak dostaneme výrok

"Jestliže není nízký tlak, pak neprší."

Abychom odůvodnili jeho platnost, usuzujeme takto: Předpokládejme, že není nízký tlak, a máme dokázat, že pak neprší. Za předpokladu, že není nízký tlak, jsou dvě možnosti: 1) prší, 2) neprší. Kdyby platila první možnost (prší), pak z naší původní implikace "Jestliže prší, pak je nízký tlak" bychom usoudili, že je nízký tlak. Tím jsme z předpokladu, že není nízký tlak, odvodili, že je nízký tlak, což ovšem není možné. Proto možnost 1) nemůže nastat, jelikož vede k logickému sporu, takže nastává možnost 2). Tím jsme ukázali, že z předpokladu "není nízký tlak" plyne tvrzení "neprší" (možnost 2)), čili jsme dokázali platnost implikace

"Jestliže není nízký tlak, pak neprší."

Zákon

$$(\neg(p \wedge q)) \Longleftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$$

se dá vyjádřit slovy

"říci, že výroky p, q neplatí současně je totéž jako říci, že neplatí aspoň jeden z nich".

Například místo výroku

"Není pravda, že tam šli oba rodiče"

(tj. "Není pravda, že tam šla matka a šel tam otec")

můžeme říci totéž slovy

"Buď tam nešla matka nebo tam nešel otec",

což můžeme říci obvyklejší formou

"Aspoň jeden z rodičů tam nešel".

Cvičení 5. Ověřte tabulkovou metodou, zda následující formule jsou logickými zákony. Pokuste se předem odhadnout výsledek.

1) $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$, 2) $(p \wedge (\neg p)) \Longrightarrow q$ (viz poznámku za tabulkou implikace), 3) $(p \Longrightarrow q) \vee (q \Longrightarrow p)$, 4) $(p \vee q) \Longrightarrow p$, 5) $(\neg(p \vee q)) \Longleftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$,

6) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg (p \wedge (\neg q)))$.

Na závěr tohoto oddílu uvedeme ještě soupis nejčastěji používaných logických zákonů. Podáváme u nich stručné objasnění.

$$p \Longleftrightarrow \neg (\neg p)$$

(viz výše),

$$(p \Longrightarrow (\neg p)) \Longrightarrow (\neg p)$$

(plyne-li z výroku p jeho negace, je výrok p nepravdivý),

$$(p \wedge q) \Longrightarrow p$$

(platí-li p a q současně, pak platí p),

$$(p \wedge q) \Longrightarrow q$$

(podobně),

$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \wedge p)$$

("komutativnost konjunkce"),

$$p \Longrightarrow (p \vee q)$$

(platí-li p , platí jistě aspoň jeden z výroků p, q)

$$q \Longrightarrow (p \vee q)$$

(podobně),

$$(p \vee q) \Longleftrightarrow (q \vee p)$$

("komutativnost disjunkce"),

$$(\neg (p \wedge q)) \Longleftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$$

(viz výše),

$$(\neg (p \vee q)) \Longleftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$$

(není-li pravda, že platí aspoň jeden z výroků p, q , pak neplatí žádný z nich, a naopak),

$$p \Longrightarrow p$$

(každé tvrzení implikuje sebe sama),

$$((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$$

(jestliže z p plyne q a z q plyne r , pak z p plyne r),

$$(\neg (p \Longrightarrow q)) \Longleftrightarrow (p \wedge (\neg q))$$

(implikace je nepravdivá právě když platí p a neplatí q),

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow ((\neg q) \Longrightarrow (\neg p))$$

(viz výše),

$$(p \Longrightarrow q) \vee (q \Longrightarrow p)$$

(buď z p vyplývá q nebo z q vyplývá p),

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow ((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p))$$

(p je ekvivalentní q právě když z p plyne q a z q plyne p ; tak se obvykle dokazuje ekvivalence v matematice),

$$p \Longleftrightarrow p$$

$$(p \Longleftrightarrow q) \Longrightarrow (q \Longleftrightarrow p)$$

$$((p \Longleftrightarrow q) \wedge (q \Longleftrightarrow r)) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow r)$$

(připomeňte si, co bylo řečeno o analogii ekvivalence s rovností a srovnejte tyto zákony s těmito vlastnostmi rovnosti: $a = a$; jestliže $a = b$, pak $b = a$; jestliže $a = b$, $b = c$, pak $a = c$),

$$(p \vee (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

(u posledních dvou formulí si povšimněte analogie se vzorcem $a . (b + c) = a . b + a . c$),

$$(p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)) \Longleftrightarrow ((p \wedge q) \Longrightarrow r)$$

(tzv. věta o dedukci, má značné použití v axiomaticky budované výrokové logice) .

2. Predikátová logika

Základním pojmem, s nímž jsme operovali v předchozím oddílu, byl pojem výroku. Byl definován jako tvrzení, které je buď pravdivé, nebo nepravdivé. V matematice (a také v jiných formálně vybudovaných teoriích) se však často setkáváme s výrazy typu

"Obrazec P je trojúhelník" ,

" x je větší než 1 " ,

"Obdélník O je čtverec" ,

které z uvedeného hlediska nejsou výroky. Nemůžeme jim totiž přiřadit určitou pravdivostní hodnotu, protože v každém z nich se vyskytuje symbol (zvaný <u>proměnná)</u> určitého předmětu, který není blíže uveden a dokud tento předmět neznáme, je pravdivost výrazu neurčitá. Všechny tyto výrazy mají však tuto vlastnost: jakmile za symbol P dosadíme konkrétní obrazec, za x konkrétní číslo, za O konkrétní obdélník, stanou se z nich smysluplná tvrzení, tedy výroky. Například, dosadíme-li do druhého výrazu za x jednou 0 a podruhé 3 , dostáváme výroky " 0 je větší než 1 " (nepravdivý), " 3 je větší než 1 " (pravdivý). Všimněme si, že za P, x, O nemůžeme dosazovat libovolné předměty, ale jen předměty z určitého okruhu předmětů, v němž má výraz smysl. Tak například se ve výrazu " x je větší než 1 " proměnná x musí pohybovat zřejmě v okruhu čísel, neboť kdybychom za x dosadili např. slovo "dům", dostali bychom nesmyslné tvrzení "dům je větší než 1 ", o jehož pravdivosti či nepravdivosti se nedá uvažovat a které tudíž není výrokem. Takový okruh předmětů, které po dosazení za proměnnou dávají smysluplný výraz (tedy výrok), nazýváme oborem této proměnné.

Výrazy tohoto typu, tj věty, v nichž se vyskytuje jedna nebo více proměnných, z nichž každá má svůj vlastní obor takový, že po dosazení předmětů z těchto oborů za příslušné proměnné dostáváme vždy výrok, nazýváme výrokovými formami nebo predikáty. Příklady více-místných predikátů:

" x je starší než y " , " x zná y "

(oborem proměnných x, y jsou lidé) ,

" a, b, c jsou strany trojúhelníka P "

(oborem proměnných a, b, c jsou všechny úsečky, oborem proměnné P jsou všechny trojúhelníky) .

Podobně jako jsme výroky značili symboly p, q, r atd., budeme predikáty značit symboly $p(x)$, $q(x,y)$, $r(a,b)$ atd., kde v závorce jsou vždy uvedeny proměnné, které se v příslušném predikátu vyskytují.

Jak jsme viděli, můžeme z predikátu vytvořit výrok tím, že za všechny proměnné dosadíme nějaké předměty z jejich oborů. Můžeme jej však vytvořit i jinými způsoby, které jsou pro predikátovou logiku charakteristické.

Mějme predikát $p(x)$ a utvořme z něj tyto výrazy:

"Pro každé x platí $p(x)$ ",

"Existuje x tak, že platí $p(x)$ ".

V těchto výrazech již není nic neurčitého. Jistě buď pro každé x predikát $p(x)$ platí nebo $p(x)$ pro některé x neplatí a podobně buď existuje x , které splňuje predikát $p(x)$ nebo takové x neexistuje, avšak to znamená, že každé z tvrzení "pro každé x platí $p(x)$ ", "existuje x tak, že platí $p(x)$ " je buď pravdivé nebo nepravdivé a tedy každý z těchto výrazů je <u>výrokem</u>. Tím, že jsme predikátu $p(x)$ předřadili slova "pro každé x " resp. "existuje x ", vytvořili jsme z něj dva výroky: <u>obecný</u> a <u>existenční</u>. Například u predikátu " x je větší než 1 " to budou výroky

"Každé x je větší než 1 " (nepravdivý),

"Existuje x , které je větší než 1 " (pravdivý).

Výrok "pro každé x platí $p(x)$ " značíme $(\forall x)p(x)$, výrok "existuje x , pro které platí $p(x)$ " značíme $(\exists x)p(x)$. Symbol $\forall$ resp. $\exists$ nazýváme <u>velkým</u> resp. <u>malým</u> <u>kvantifikátorem</u> (jsou to převrácená písmena A, E , začáteční písmena německých slov allgemein, existiert - všeobecný, existuje). Výrazem $(\exists x)p(x)$ míníme vždy, že existuje aspoň jedno x , splňující $p(x)$, avšak nevylučujeme, že takových x může být více.

Obsahuje-li predikát více proměnných, pak k tomu, abychom z něj utvořili výrok, je nutné předřadit mu kvantifikátory přes všechny proměnné, které se v něm vyskytují. Vezměme např. predikát $p(x, y)$, který znamená " x zná y ". Potom výraz $(\forall x)p(x, y)$ není ještě výrokem, je to totiž výraz

"Každý zná y " ,

což je stále ještě predikát s proměnnou y . Avšak výraz $(\forall x)(\exists y)p(x,y)$, který znamená

"Ke každému x existuje y tak, že x zná y " ,

tj.

"Každý někoho zná" ,

už je výrokem. Různými kombinacemi velkých a malých kvantififikátorů dostáváme ze stejného predikátu různé výroky. V našem případě máme těchto osm možností:

$(\forall x)(\forall y)\ (x \text{ zná } y)$	"každý zná každého",
$(\forall x)(\exists y)\ (x \text{ zná } y)$	"každý někoho zná",
$(\exists x)(\forall y)\ (x \text{ zná } y)$	"existuje někdo, kdo zná každého",
$(\exists x)(\exists y)\ (x \text{ zná } y)$	"existují dva, kteří se znají",
$(\forall y)(\forall x)\ (x \text{ zná } y)$	"každý zná každého",
$(\forall y)(\exists x)\ (x \text{ zná } y)$	"každého někdo zná",
$(\exists y)(\forall x)\ (x \text{ zná } y)$	"existuje někdo, koho zná každý",
$(\exists y)(\exists x)\ (x \text{ zná } y)$	"existují dva, kteří se znají".

Cvičení 6. Proveďte totéž pro predikát " x obdivuje y ".

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že změnou pořadí některých kvantifikátorů můžeme změnit smysl výroku. Je vidět, že výroky $(\forall x)(\exists y)\, p(x,y)$, $(\exists y)(\forall x)\, p(x,y)$ nemají stejný smysl: jestliže každý někoho zná, může to stále ještě znamenat, že různí lidé znají různé lidi a nemusí z toho plynout, že existuje někdo, koho znají všichni. Naopak však platí, že existuje-li někdo, koho znají všichni, pak zaručeně každý někoho zná (přinejmenším toho, koho zná každý). Platí tedy implikace

$$((\exists y)(\forall x)\, p(x,y)) \Longrightarrow ((\forall x)(\exists y)\, p(x,y)) ,$$

kdežto opačná implikace platit nemusí. Je proto nutné, jsou-li kvantifikátory ve výrazu různé, dávat pozor na jejich pořadí. Tato potíž nevzniká, jsou-li všechny kvantifikátory stejné, neboť, jak je patrné z našeho příkladu, výroky $(\forall x)(\forall y)\,p(x,y)$ a $(\forall y)(\forall x)\,p(x,y)$ jsou stejné (ekvivalentní) a totéž platí pro výroky $(\exists x)(\exists y)\,p(x,y)$ a $(\exists y)(\exists x)\,p(x,y)$.

Všimněme si, že ve výrazech $\forall x$, $\exists x$ máme vyznačenou pouze proměnnou, nikoliv její obor. Přesto však často obor bývá v obecném a existenčním výroku uveden, a to způsobem, který se nejlépe objasní z následujícího příkladu. Místo výroků

"Každé x je větší než 1", tj. $(\forall x)(x > 1)$

a

"Existuje x, které je větší než 1", tj. $(\exists x)(x > 1)$,

v nichž obor proměnné x není uveden, můžeme použít ekvivalentního vyjádření v tomto tvaru: "každé x, které je číslem, je větší než 1", "existuje x, které je číslo a je větší než 1", tj.

"Pro každé x, je-li x číslo, pak $x > 1$",

"Existuje x takové, že x je číslo a $x > 1$",

což v symbolickém zápisu zní

$$(\forall x)(x \text{ je číslo} \Longrightarrow x > 1)\ ,$$

$$(\exists x)((x \text{ je číslo}) \wedge (x > 1))\ .$$

Zde je podstatné, že za <u>velkým</u> kvantifikátorem následuje <u>implikace</u>, kdežto za <u>malým</u> následuje <u>konjunkce</u>. Bývá tomu tak ve většině podobných případů.

Negace obecného a existenčního tvrzení (velkého a malého kvantifikátoru), ač jde v podstatě o jednoduchý problém, bývá často chápána špatně a mnohdy vede k nesprávným úsudkům. Mějme určitý predikát $p(x)$; výrok $(\forall x)p(x)$ tvrdí, že pro každé x je výrok $p(x)$ pravdivý. Co znamená negace tohoto výroku? Negace tvrdí, že není pravda, že pro všechna x je výrok $p(x)$ pravdivý, to znamená, že existuje takové x , pro něž výrok $p(x)$ je nepravdivý. Naopak, existuje-li (aspoň jedno) x takové, že výrok $p(x)$ je nepravdivý, pak není pravda, že by $p(x)$ bylo pravdivé pro všechna x . Výsledek zapíšeme symbolicky takto:

$$(\neg(\forall x)p(x)) \Longleftrightarrow (\exists x)(\neg p(x)) .$$

Chceme-li negovat existenční výrok $(\exists x)p(x)$, který říká, že existuje aspoň jedno x , pro které výrok $p(x)$ je pravdivý, stačí si uvědomit, že jeho negace tvrdí, že neexistuje žádné takové x , tj. že pro každé x je výrok $p(x)$ nepravdivý, takže jeho negace $\neg p(x)$ je pravdivá; a naopak. Tím dostáváme vzorec

$$(\neg(\exists x)p(x)) \Longleftrightarrow (\forall x)(\neg p(x)) .$$

Oba výsledky můžeme shrnout takto: negací obecného (existenčního) výroku je existenční (obecný) výrok s negovaným predikátem. Podle toho negací tvrzení

"Všichni lidé jsou černovlasí" ,

"Existuje člověk, který je prorokem ve své vlasti" ,

jsou tvrzení

"Existuje člověk, který není černovlasý" ,

"Pro každého člověka platí, že není prorokem ve své vlasti",

která můžeme podat v obvyklejší formulaci :

"Někteří lidé nejsou černovlasí" ,

"Žádný člověk není prorokem ve své vlasti" .

Tak jako jsme uvedli v 1. oddílu definici výrokové formule, mohli bychom nyní uvést definici predikátové formule. Liší se od definice výrokové formule tím, že kromě logických spojek se k vytváření nových formulí z formulí již daných může použít i předřazení velkého nebo malého kvantifikátoru před formuli. Nebudeme však přesnou definici uvádět, neboť více než tato definice nás nyní zajímá otázka zákonů predikátové logiky.

Logickým zákonem, neboli zákonem výrokové logiky, jsme v předcházejícím oddílu nazvali každou výrokovou formuli, která byla pravdivá nezávisle na pravdivostních hodnotách výroků, z nichž byla složena. To můžeme říci také tak, že tato formule zůstane pravdivá při libovolném dosazení konkrétních výroků za jednotlivé symboly výroků v této formuli. Tohoto způsobu použijeme k vymezení pojmu zákona predikátové logiky. Budeme jím rozumět takovou predikátovou formuli, která zůstane pravdivá při libovolném dosazení konkrétních predikátů za symboly predikátů, které se v ní vyskytují (musíme pouze dbát na to, aby dosazovaný predikát měl stejný počet proměnných jako původní symbolický predikát).

Zákony predikátové logiky jsou např. tyto formule:

$$((\forall x) p(x)) \Longrightarrow ((\exists x) p(x)) \quad ,$$

$$(((\forall x)(p(x) \Longrightarrow q(x))) \wedge ((\forall x)(q(x) \Longrightarrow r(x)))) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\forall x)(p(x) \Longrightarrow r(x)) \quad ,$$

$$(\neg(\exists x)(p(x) \wedge q(x))) \Longleftrightarrow (\forall x)(p(x) \Longrightarrow (\neg q(x))) \quad .$$

Příklady na tyto tři zákony:

"Jestliže každý student skládá zkoušky, pak existuje student, který skládá zkoušky" ,

"Jestliže každý člověk je savec a každý savec je smrtelný, pak každý člověk je smrtelný" ,

"Člověk, který by byl zároveň dobrým šachistou i dobrým vzpěračem neexistuje právě když každý člověk, který je dobrým šachistou, není dobrým vzpěračem" .

Naskýtá se nyní otázka, zda je možné z tvaru predikátové formule poznat, zda tato formule je nebo není zákonem predikátové logiky. Odpověď na tuto otázku je záporná, jak dokázal americký logik A. Church r. 1936. Z jeho výsledku plyne, že neexistuje obecná metoda, analogická např. tabulkové metodě ve výrokové logice, jež by umožňovala o každé predikátové formuli rozhodnout, zda je nebo není zákonem predikátové logiky. Pokud nechceme použít axiomaticky vybudované predikátové logiky, musíme se tedy při takovém rozhodování řídit pouhým "zdravým rozumem".

Historická poznámka. Prvé počátky výrokové logiky lze najít ve spisech stoických filosofů (Filon z Megary aj,). Jejich dílo však bylo ještě ve starověku zastíněno věhlasem Aristotelova čtyřdílného spisu "Organon", v němž byl vyložen ucelený systém některých typů obecných a existenčních výroků, zvaných sylogismy. Aristotelovo dílo se stalo základem středověké scholastické logiky, která vrcholí v dílech W. Occama (1290 - 1349) a D. Scota (1270 - 1308). S výjimkou G.W. Leibnize (1646 - 1716) se novověká racionalistická a empirická filosofie omezila pouze na kritiku scholastiky a do samotné oblasti logiky nevnesla nic podstatně nového. Renesance logiky začíná teprve v 19. stol. v dílech G. Boolea (1815 - 1910) a G. Fregeho (1848 - 1925). Poprvé se nová logika ve své nynější podobě objevila v dnes již klasickém díle A.N. Whiteheada (1861 - 1947) a B. Russella (1872 - 1970) "Principia Mathematica" (Cambridge 1910-13).

3. Množiny

Pojem množiny je základním pojmem moderní matematiky; z toho vyplývá i jeho obecnost. Množinou rozumíme libovolný soubor (někdy též říkáme třídu, souhrn apod.) předmětů, který je přesně vymezený v tom smyslu, že o každém předmětu víme, zda do dané množiny patří nebo nepatří. Přitom předměty, z nichž se množina skládá, mohou být rozmanité a nemusí mít žádné společné vlastnosti. Uvedeme několik příkladů množin:

1) množina všech občanů Československa, starších 18 let,

2) množina všech malých písmen latinské abecedy,

3) množina těch učitelů Karlovy university, kteří mají titul kandidáta věd,

4) množina sestávající z pana Nováka, čísla 2 a zrnka písku.

Množiny vytváříme několika způsoby, z nichž nejdůležitější jsou tyto dva:

a) Vyjmenování všech prvků množiny. Tohoto způsobu jsme použili v příkladu 4) a v podstatě i v příkladu 2). Množinu takto vytvořenou zapisujeme tak, že do složených závorek vypíšeme všechny prvky dané množiny a oddělíme je navzájem čárkami. Např. zápis množiny z příkladu 4) by zněl:

$\{$ pan Novák, 2, zrnko písku $\}$.

b) Shrnutím všech prvků určité vlastnosti do jedné množiny (příklady 1), 3)). Zde bývá dán určitý jednomístný predikát, např. " x je občan Československa, starší 18 let" a příslušná množina sestává ze všech předmětů, pro které je tento predikát pravdivý. Množinu takto vytvořenou pomocí predikátu $p(x)$ zapisujeme $\{x \mid p(x)\}$ a čteme "množina těch

x , pro které $p(x)$ ", např. "množina těch x , pro která je x občanem Československa, starším 18 let ".

Patří-li předmět x do množiny A , zapisujeme to výrazem " $x \in A$ " a čteme " x je <u>prvkem</u> množiny A " nebo " x je elementem A ", někdy " x patří do A ". Dvě množiny A , B jsou si rovné (tj. $A = B$) právě když sestávají obě ze stejných prvků, tj. když každý prvek, který patří do A , patří také do B a každý prvek, který patří do B , patří do A . Například množiny

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 2, 1\}$$

jsou si rovné, protože sestávají z týchž prvků. Naproti tomu množiny

$$A = \{a, b, c\}$$
$$B = \{a, b, d\}$$

si nejsou rovny, protože prvek c , který patří do A , nepatří do B a prvek d , patřící do B , nepatří do A .

Jestliže každý prvek množiny A patří do množiny B , říkáme, že A je <u>podmnožinou</u> B , což zapisujeme $A \subset B$ a čteme " A je částí B " nebo " A je podmnožinou B ". Tuto slovní definici můžeme formálně přepsat takto:

$$(A \subset B) \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

($A \subset B$ právě když každé x , které patří do A , patří do B).

Například, je-li

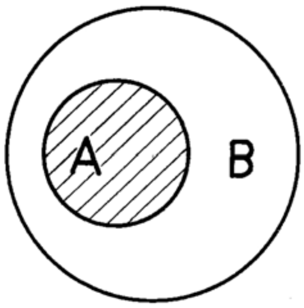
$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{a, b, c\},$$

pak každý prvek množiny A (tj. prvky a, b) patří i do množiny B, takže $A \subset B$. Není ovšem $B \subset A$, protože prvek c nepatří do A. Vidíme tedy, že je-li $A \subset B$, nemusí být $B \subset A$. Platí-li však $A \subset B$ i $B \subset A$, jsou si množiny A, B rovné, neboť v tom případě každý prvek A patří do B a každý prvek B patří do A. To můžeme vystihnout tímto zápisem:

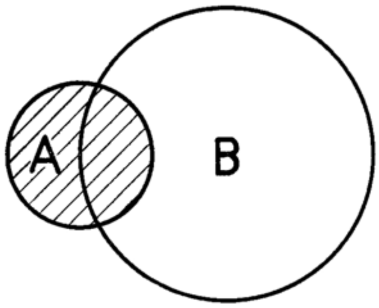
$$(A \subset B \wedge B \subset A) \Longrightarrow (A = B)$$

(jak $B \subset A$, tak $A \subset B$ jsou výroky, takže znaménko konjunkce je opodstatněné).

Znázorníme-li množiny A, B ve formě kruhů, pak skutečnost, že A je podmnožinou B, znamená, že každý bod kruhu A leží v kruhu B, takže celý kruh A leží v B.



Jestliže by však kruhy A, B byly v této poloze:



pak by neplatilo ani $A \subset B$, ani $B \subset A$.

Symbol " $\subset$ " se nazývá <u>inkluze</u>. Má tři základní vlastnosti:

1) pro každou množinu A je $A \subset A$

2) je-li $A \subset B$ a $B \subset A$, pak $A = B$

3) je-li $A \subset B$ a $B \subset C$, pak $A \subset C$.

První z těchto vlastností je triviální, tvrdí totiž, že je-li $x \in A$, pak $x \in A$. Druhou jsme již uvedli výše.

<u>Cvičení 7</u>. 1) Odůvodněte úvahou i náčrtkem vlastnost 3).

2) Je pravda, že pro libovolné množiny A, B je buď $A \subset B$ nebo $B \subset A$?

Z důvodů, které se objasní později, zavádíme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Říká se jí <u>prázdná množina</u> a značí se $\emptyset$, ve starší literatuře též 0 nebo Λ (velké lambda). Pro čtenáře bude vhodnější, nebude-li připisovat prázdné množině žádný metafyzický význam a spokojí-li se vysvětlením, že jde pouze o symbol, který zjednodušuje formulace různých tvrzení a vzorců. Pro každou množinu A je

$$\emptyset \subset A .$$

Správnost tohoto tvrzení nahlédneme, uvědomíme-li si, že jde o zkrácený zápis tvrzení $(\forall x)(x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A)$. Protože však pro žádné x nemůže být výrok " $x \in \emptyset$ " pravdivý (neboť $\emptyset$ neobsahuje žádné prvky), je předpoklad implikace $x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A$ nepravdivý, takže (podle tabulky implikace) je celá implikace pravdivá.

Máme-li dánu množinu A, můžeme pomocí ní sestavit novou množinu, jejímiž prvky budou všechny podmnožiny množiny A. Tuto množinu budeme značit $P(A)$ a nazývat "<u>množinou všech podmnožin množiny</u> A ". Podle toho, jak jsme množinu $P(A)$

definovali, je

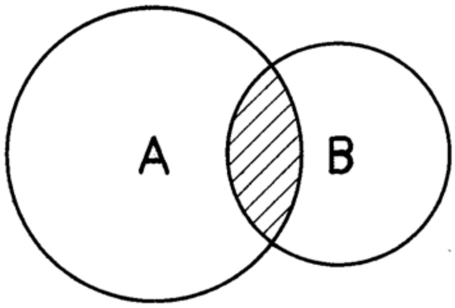
$$P(A) = \{B \mid B \subset A\}$$

($P(A)$ je množina těch B, která jsou částí A)
(napravo je výraz tvaru $\{x \mid p(x)\}$; proměnná je označena B a predikátem je výraz " $B \subset A$ "; viz výše odst. b) o vytváření množin).

Například množina $A = \{a, b, c\}$ má tyto podmnožiny: prázdnou množinu $\emptyset$, tři jednoprvkové podmnožiny $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, tři dvouprvkové podmnožiny $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ a jednu trojprvkovou podmnožinu $\{a, b, c\}$. Tedy
$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
Dá se ukázat, že má-li množina A n prvků, pak množina $P(A)$ má 2^n prvků (v našem příkladě měla množina A tři prvky a množina $P(A)$ měla $8 = 2^3$ prvků).

Máme-li dány dvě množiny A, B, můžeme z nich vytvořit další množiny několika tzv. množinovými operacemi. K jejich definicím a vlastnostem nyní přejdeme.

První z těchto operací je tzv. <u>průnik</u> množin. Jsou-li dány množiny A, B, můžeme z nich vytvořit novou množinu, zvanou průnikem těchto množin (znač. $A \cap B$), jež sestává z těch prvků, které leží v obou množinách. Graficky ji můžeme znázornit následujícím obrazcem, v němž vyšrafovaná část znázorňuje množinu společných bodů obou množin, tedy jejich průnik:



Jiné příklady:

1) je-li P množina profesionálů, F množina fotbalistů, pak $P \cap F$ je množina profesionálních fotbalistů,

2) je-li V množina všech vojáků, L množina všech lékařů, je $V \cap L$ množina vojenských lékařů,

3) je-li L množina velkých písmen latinské abecedy, $Ř$ množina velkých písmen řecké abecedy, pak $L \cap Ř$ je množina velkých písmen, které patří do obou těchto abeced (např. A, K atd.).

Symbolicky můžeme průnik dvou množin zapsat dvojím způsobem: buď

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad \text{(což je častější)}$$

nebo

$$(\forall x)((x \in A \cap B) \Longleftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)))$$

(pro každé x, x patří do $A \cap B$ právě když x patří do A a x patří do B).

Nemají-li množiny A, B žádný společný prvek, je jejich průnik prázdnou množinou, tj. $A \cap B = \emptyset$ (zde vidíme výhodu zavedení prázdné množiny: kdybychom ji nepovažovali za množinu, pak by existovaly případy, kdy by průnik dvou množin nebyl množinou). V takovém případě říkáme, že množiny A, B jsou <u>disjunktní</u>.

Jsou-li A, B libovolné množiny, pak platí:

1) $A \cap A = A$

2) $A \cap B \subset A$ (podobně $A \cap B \subset B$)

3) $A \cap B = B \cap A$

První z těchto tvrzení je zřejmé: množina těch x, která patří do A i do A, je zase A. Druhé tvrzení ukazuje, že operací průniku dostaneme množinu, která patří do každé z původních množin, třetí uvádí, že průnik dvou množin je nezávislý na jejich pořadí (této vlastnosti se říká komutativnost).

Cvičení 8. Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda platí pro libovolné množiny A, B : 1) je-li $A \subset B$, pak $A \cap B = A$, 2) je-li $A \cap B = A$, pak $A \subset B$, 3) $A \cap \emptyset = A$, 4) $A \cap \emptyset = \emptyset$, 5) je-li $A \subset (A \cap B)$, pak $B \subset A$, 6) je-li $A \subset (A \cap B)$, pak $A \subset B$, 7) je-li $A \subset A \cap B$ a množiny A, B jsou disjunktní, pak obě tyto množiny jsou prázdné.

Operaci průniku můžeme rozšířit i na větší počet množin. Například $A \cap B \cap C \cap D$ je množina těch prvků, které leží v každé z množin A, B, C, D, tj.

$$A \cap B \cap C \cap D = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C) \wedge (x \in D)\};$$

apod.

Další základní množinová operace je operace sjednocení dvou množin A, B (značíme $A \cup B$). Je to množina těch prvků, které patří aspoň do jedné z množin A, B (nebo i do obou). Můžeme také říci, že je to množina, sestavená z těch prvků, které patří buď do A nebo do B. Množinu $A \cup B$ vlastně tvoříme tak, že prvky obou množin "dáme dohromady" a tak vytvoříme novou množinu. Symbolicky:

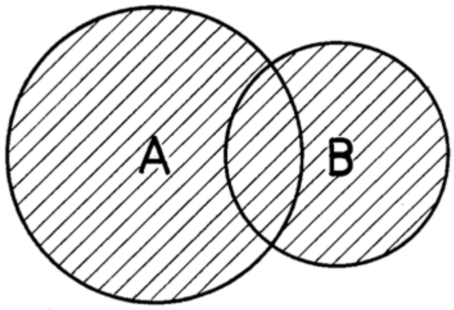
$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

nebo

$$(\forall x)((x \in A \cup B) \Longleftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)))$$

(pro každé x, x patří do $A \cup B$ právě když x patří do A nebo x patří do B).

Sjednocení znázorníme opět dvěma kruhy, které představují množiny A, B. Vyšrafovaná část značí jejich sjednocení:



Příklady:

1) je-li A množina posluchačů 1. ročníku FFKU, B množina posluchačů 2. ročníku FFKU, pak $A \cup B$ je množina posluchačů prvních dvou ročníků FFKU,

2) je-li E množina všech tureckých měst, která leží v Evropě, A množina těch tureckých měst, která leží v Asii, pak $E \cup A$ je množina všech tureckých měst,

3) je-li S množina pijáků světlého piva, $Č$ množina pijáků černého piva, pak $S \cup Č$ je množina pijáků piva.

Na rozdíl od operace průniku, která "zmenšuje" každou z množin A, B (v tom smyslu, že $A \cap B$ je částí jak množiny A, tak množiny B), operace sjednocení tyto množiny "zvětšuje". Každá z množin A, B je totiž obsažena v množině $A \cup B$, tj. platí

$$A \subset (A \cup B)$$
$$B \subset (A \cup B) .$$

Některé vlastnosti sjednocení jsou však obdobné odpovídajícím vlastnostem průniku. Například, pro každé dvě množiny A, B platí

$$A \cup A = A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

(viz vlastnosti 1), 3) průniku).

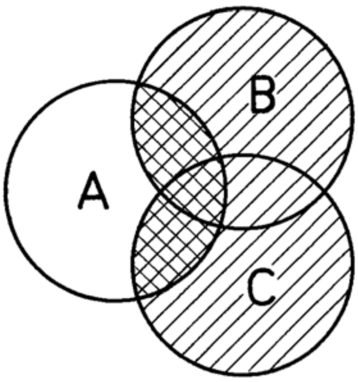
Dále platí:

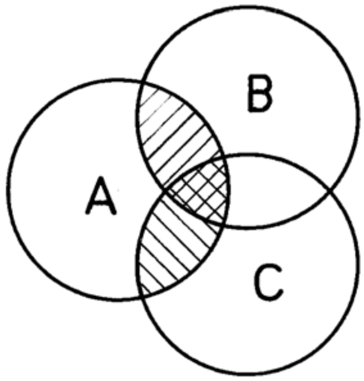
je-li $A \cup B = A$, pak $B \subset A$.

Operace průniku a sjednocení jsou spojeny následujícím vztahem: pro libovolné množiny A, B, C platí rovnost

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

Platnost této rovnosti můžeme demonstrovat těmito dvěma obrázky:





Na prvním z nich je podélným šrafováním vyznačena množina $B \cup C$ a příčným množina $A \cap (B \cup C)$. Na druhém je podélně vyšrafována množina $A \cap B$ a příčně množina $A \cap C$. Je patrné, že množiny $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ jsou si rovny.

Cvičení 9. Znázorněte obdobně rovnost

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \ .$$

Cvičení 10. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí: 1) $A \cap B \subset A \cup B$, 2) $A \cup B \subset A \cap B$, 3) je-li $A \cap B = A \cup B$, pak $A = B$, 4) $A \cup \emptyset = \emptyset$, 5) $A \cup \emptyset = A$, 6) je-li $A \subset B$, pak $A \cup C \subset B \cup C$ pro libovolnou množinu C.

Podobně jako průnik, můžeme i sjednocení provádět s více množinami. Např. $A \cup B \cup C = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B) \vee (x \in C)\}$.

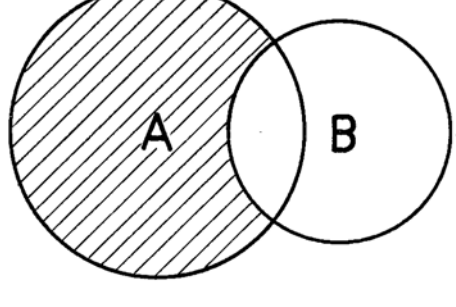
Poněkud méně často, než operace sjednocení a průniku, se vyskytuje operace rozdílu dvou množin A, B, která se značí $A - B$. Je to množina těch prvků množiny A, které nepatří do množiny B, symbolicky

$$A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge \neg (x \in B)\}$$

nebo $(\forall x)((x \in A - B) \Longleftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg (x \in B)))$

(pro každé x, x patří do $A - B$ právě když x patří do A a x nepatří do B).

Znázorníme-li, jako obvykle, množiny A, B kruhy, bude $A - B$ množina těch bodů kruhu A, které neleží v kruhu B (vyšrafovaná část):



Jsou-li A, B libovolné množiny, potom platí:

$$A - B \subset A$$

$(A - B) \cap B = \emptyset$ (tj. množiny $A - B$, B jsou disjunktní)

$$(A - B) \cup (A \cap B) = A$$

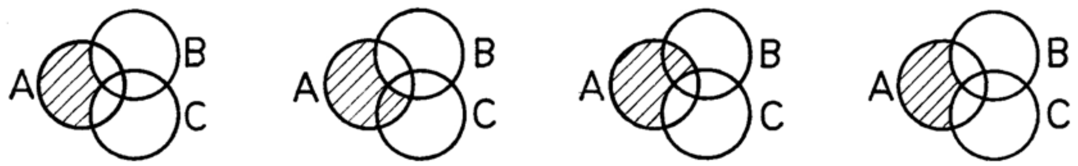
$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) .$$

Operace průniku, sjednocení a rozdílu jsou navzájem spojeny těmito dvěma (zv. de Morganovými) zákony, které platí pro libovolné množiny A, B, C :

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) .$$

První z nich může být ilustrován těmito obrázky:



$A - (B \cup C)$ $A - B$ $A - C$ $(A - B) \cap (A - C)$

Podobné znázornění druhého de Morganova zákona přenecháváme čtenáři.

<u>Cvičení 11</u>. Rozhodněte, které z následujících tvrzení platí pro libovolné množiny A, B, C : 1) je-li $B \subset C$, pak $A - B \subset A - C$, 2) je-li $B \subset C$, pak $A - C \subset A - B$, 3) $A - (A - B) = A \cap B$, 4) $A - (A - B) = B$.

Závěrem tohoto oddílu bychom chtěli obrátit čtenářovu pozornost na paralelu mezi množinovými operacemi a logickými spojkami. Všimněme si, že inkluze je definována pomocí implikace, rovnost pomocí ekvivalence, průnik pomocí konjunkce, sjednocení pomocí disjunkce a rozdíl pomocí negace. Skutečně se ukazuje, že mnoho tvrzení o operacích s množinami má podobnou formu jako některé zákony výrokové logiky, přičemž

symbolu $\subset$	odpovídá symbol	$\Longrightarrow$
$=$		$\Longleftrightarrow$
$\cap$		$\wedge$
$\cup$		$\vee$
$-$		$\neg$

Sledujte tuto analogii na těchto dvojicích:

1. $((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Longrightarrow (A = B)$

   $((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow q)$

2. $((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Longrightarrow (A \subset C)$

   $((p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$

3. $A \cap A = A$

   $(p \wedge p) \Longleftrightarrow p$

4. $A \cap B \subset A$

   $(p \wedge q) \Longrightarrow p$

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $(p \vee (q \wedge r)) \Longleftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

6. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

   $\neg (p \vee q) \Longleftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$

Tato analogie není náhodná. Uvedená tvrzení o množinách se totiž dokazují pomocí "jim odpovídajících" formulí výrokové logiky a proto mají podobnou formu. Uvedli jsme tyto příklady pouze proto, abychom ukázali, jak těsně je teorie množin spjata s logikou.

4. Relace a funkce

V tomto oddílu uvedeme nejprve ještě jednu množinovou konstrukci a ukážeme některé možnosti jejího použití, mj. též obecnou definici vztahu (relace) a funkční závislosti (funkce).

Jestliže množina A sestává pouze ze dvou různých prvků, nazývá se <u>dvojice</u>. Jsou-li její prvky a, b, pak můžeme, jak víme z předchozího oddílu, zapsat množinu A ve tvaru $\{a, b\}$. Stejně tak ovšem můžeme tuto množinu zapsat i jako $\{b, a\}$, protože oba prvky množiny A jsou rovnocenné, takže nezáleží na pořadí, v němž se píší.

V matematice však často potřebujeme pracovat s takovými dvojicemi, v nichž na pořadí prvků záleží, to znamená, že je předem dáno (stanoveno), který z obou prvků je první a který je druhý. Takovou dvojici prvků nazýváme <u>uspořádanou dvojicí</u> a značíme ji (a, b) (pozor na jiný druh závorek!). Zatímco množiny $\{a, b\}$, $\{b, a\}$ byly stejné, jsou množiny (a, b) (b, a) obecně různé právě proto, že se liší pořadím, které je u uspořádaných dvojic podstatné, kdežto u "obyčejných" dvojic nehraje roli.

Mějme nyní dvě množiny A, B. Z nich můžeme utvořit novou množinu, jejímiž prvky budou všechny možné uspořádané dvojice takové, že jejich první prvek patří do A, kdežto druhý do B. Objasníme to na příkladě: Nechť množina A obsahuje prvky x, y, z, tj. $A = \{x, y, z\}$ a množina B obsahuje čísla 1 a 2, tj. $B = \{1, 2\}$. Jedná se nyní o to, sestavit množinu všech možných uspořádaných dvojic, na jejichž prvním místě by byl některý prvek množiny A a na druhém některý prvek množiny B. Všechny možné takové uspořádané dvojice jsou tyto:

$$(x,1)$$
$$(y,1)$$
$$(z,1)$$
$$(x,2)$$
$$(y,2)$$
$$(z,2)\,.$$

Množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny tyto dvojice, nazýváme <u>kartézským součinem</u> množin A, B (podle francouzského filosofa a matematika Descartesa, jehož latinské jméno znělo Cartesius) a značíme $A \times B$. V našem předchozím příkladě tedy $A \times B = \{(x,1),(y,1),(z,1),(x,2),(y,2),(z,2)\}$. Dá se dokázat, že má-li množina A n prvků, množina B m prvků, pak množina $A \times B$ má $n \cdot m$ prvků. Např. v našem příkladě měla množina A 3 prvky ($n = 3$), množina B 2 prvky ($m = 2$) a množina $A \times B$ měla skutečně $3 \cdot 2 = 6$ prvků.

Tak jako jsme definovali uspořádanou dvojici, můžeme definovat uspořádanou trojici (jako množinu (a, b, c), složenou ze tří prvků, které za sebou následují v daném pořadí), čtveřici atd. a s pomocí těchto pojmů definovat kartézský součin tří, čtyř a více množin. Například kartézský součin $A \times B \times C$ je množina všech možných uspořádaných trojic takových, že jejich první prvek patří do A, druhý do B a třetí do C. O počtu prvků množiny $A \times B \times C$ platí analogická věta: označíme-li počty prvků množin A, B, C postupně n, m, p, pak množina $A \times B \times C$ má $n \cdot m \cdot p$ prvků. Obdobně pro kartézský součin více množin.

Ukážeme na příkladech dvě možná použití kartézského součinu v lingvistice.

Příklad 1. Předpokládejme, že zkoumáme fragment češtiny, složený z jednoduchých vět tvaru podmět - přísudek - předmět, přičemž ve funkci podmětu může vystupovat libovolné z podstatných jmen a zájmen

otec, Karel, on, ona, dítě, člověk, student, Jarda,

ve funkci přísudku libovolné ze slov

kupuje, čte, odkládá, balí, vyhazuje

a ve funkci předmětu libovolné ze slov

knihu, sešit, noviny, časopis.

Z těchto slov se pak dají vytvářet jednoduché věty, jako např. "Otec odkládá noviny", "Dítě kupuje sešit" apod. Ptáme se, kolik takových vět je možno z daných slov sestavit.
Každá z takových vět sestává ze tří slov, z nichž první patří mezi slova ve funkci podmětu, druhé mezi slova ve funkci přísudku, třetí mezi slova ve funkci předmětu, to znamená, že jejich pořadí je stanoveno, takže každou z těchto vět můžeme považovat za uspořádanou trojici, např. větu "Karel kupuje časopis" za trojici (Karel, kupuje, časopis). Množina všech možných takových vět se proto dá ztotožnit s množinou všech možných takových trojic, tedy s kartézským součinem $A \times B \times C$ kde

$A = \{$otec, Karel, on, ona, dítě, člověk, student, Jarda$\}$,

$B = \{$kupuje, čte, odkládá, balí, vyhazuje$\}$,

$C = \{$knihu, sešit, noviny, časopis$\}$.

Protože A má 8 prvků, B má 5 prvků a C má 4 prvky, podle naší věty množina $A \times B \times C$ má $8 \cdot 5 \cdot 4 = 160$ prvků, takže z uvedených slov lze vytvořit celkem 160 jednoduchých vět.

Příklad 2. Kořen arabského slova sestává ze tří souhlásek, přičemž v arabštině existuje celkem 28 souhlásek. Otázka zní, kolik možných trojkonsonantních kořenů je možno z těchto 28 souhlásek sestavit, jestliže nebudeme přihlížet k fonetickým pravidlům, která některé z těchto možností apriorně vylučují. Kořen, sestávající ze tří souhlásek, můžeme chápat jako uspořádanou trojici, tedy prvek kartézského součinu $A \times A \times A$, kde A je množina souhlásek.
Proto podle výšeuvedené věty je celkový počet takových trojic roven číslu 28 . 28 . 28 = 21952. Skutečný počet kořenů je ovšem vzhledem ke zmíněným pravidlům nižší (viz o tom článek J. H. Greenberga, The Patterning of Root Morphems in Semitic, Word VI (1950), 162 - 181).

Vztah mezi dvěma předměty x, y má jak významovou, tak formální složku. My se zde budeme zabývat pouze zkoumáním formálních aspektů tohoto pojmu pomocí aparátu teorie množin. Takto abstraktně chápaný vztah budeme nazývat relací.

Každý z výrazů

" x je otcem y "

" x je menší nebo rovno y "

" x je synonymum y "

je relací mezi prvky x, y. Každý z těchto výrazů je dvoumístným predikátem, v němž proměnná x má jistý obor A a proměnná y jistý obor B. Vezmeme-li libovolné prvky $x \in A$, $y \in B$, pak buď tyto prvky jsou ve vztahu, uváděném příslušným predikátem (tj. predikát je pro tyto hodnoty proměnných pravdivý), nebo ne. Vybereme-li všechny dvojice x, y, které jsou ve vztahu, určeném predikátem (tj. pro které je tento predikát pravdivý) a budeme-li každou takovou dvojici považovat za uspořádanou dvojici (x, y), utvoří všechny takové uspořádané dvojice určitou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Právě tuto podmnožinu kartézského součinu budeme nazývat relací:

Relací na množinách A, B rozumíme podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$.

Je-li dána podmnožina R kartézského součinu $A \times B$, pak prvky x, y jsou v relaci R právě když dvojice (x, y) patří do R, tedy když $(x, y) \in R$. Je zvykem, místo

$$(x, y) \in R$$

psát

$$x R y ,$$

tj. klást symbol relace mezi obě proměnné, což odpovídá běžnému vyjadřování

"$x \leq y$",

"x je synonymum y"

atd.

Jestliže proměnné x, y mají stejný obor, tj. $A = B$, takže $R \subset A \times A$, pak říkáme, že R je relace na množině A. Např. výšeuvedená relace "x je otcem y" je relací na množině všech lidí.

Poznámka. Uvedená definice relace je velmi obecná a vhodná spíše pro formální matematické vyjadřování. Pro čtenáře snad bude srozumitelnější, bude-li v dalším relaci chápat jako dvoumístný predikát.

Nechť R je relace na množině A, takže obě proměnné ve výrazu $x R y$ mají stejný obor A. O relaci R říkáme, že je reflexivní, jestliže každý prvek množiny A je v této relaci se sebou samým, tj. jestliže

pro každé $x \in A$ je $x R x$.

Například relace

$$" x \leq y "$$

$$" x \text{ je synonymum } y "$$

jsou reflexivní (neboť $x \leq x$ a x je synonymum x), kdežto relace

$$" x \text{ je otcem } y "$$

nikoliv.

Relace R je <u>symetrická</u>, jestliže pro libovolné dva prvky $x \in A$, $y \in A$,

je-li $x R y$, pak $y R x$

(tj. je-li x v relaci R s y, pak také y je v relaci R s x). Z uvedených tří relací je pouze relace

$$" x \text{ je synonymum } y "$$

symetrická, kdežto ostatní dvě nikoliv (je-li x otcem y, pak y není otcem x; je-li $x \leq y$, pak nemusí být $y \leq x$, protože například $3 < 5$, takže $3 \leq 5$, ale není $5 \leq 3$).

Relaci R nazýváme tranzitivní, jestliže pro libovolné prvky $x \in A$, $y \in A$, $z \in A$ platí:

je-li $x R y$ a $y R z$, pak $x R z$.

Relace

$$" x \text{ je otcem } y "$$

není tranzitivní, neboť je-li x otcem y a y je otcem z, pak x není otcem z.

Relace

1) " $x \leq y$ ",

2) " x je synonymum y "

však tranzitivní jsou: 1) je-li $x \leq y$ a $y \leq z$, pak $x \leq z$, 2) je-li x synonymní s y a y synonymní s z, pak x je synonymní s z.

Jestliže relace R je reflexivní, symetrická a tranzitivní na množině A, pak relaci R nazýváme <u>ekvivalencí</u> na množině A. Například relace

" x je synonymum y "

je, jak jsme viděli, reflexivní, symetrická a tranzitivní na množině všech slov a proto je na této množině relací ekvivalence.

Jiný příklad: nechť A je množina všech českých substantiv a R je relace

" x se skloňuje podle stejného vzoru jako y ".

Relace R je relací ekvivalence na množině A. Abychom to dokázali, musíme ověřit, že tato relace je 1) reflexivní, 2) symetrická, 3) tranzitivní.

Ad 1): x se skloňuje podle stejného vzoru jako x, takže R je reflexivní.

Ad 2): jestliže x se skloňuje podle stejného vzoru jako y, pak y se skloňuje podle stejného vzoru jako x; proto relace R je symetrická.

Ad 3): jestliže x se skloňuje podle stejného vzoru jako y a y se skloňuje podle stejného vzoru jako z, pak x se skloňuje podle stejného vzoru jako z, tedy R je tranzitivní.

<u>Cvičení 12</u>. Zjistěte, zda níže uvedené relace (v závorce je uvedeno, na jaké množině) jsou relacemi ekvivalence:

1) " x a y se narodili ve stejný den" (množina všech lidí),

2) "přímky x, y jsou rovnoběžné" (množina přímek),

3) " $x - y$ je číslo, dělitelné dvěma" (množina celých čísel),

4) "událost x předcházela události y " (množina všech událostí).

Relace ekvivalence je pro matematiku (i jiné vědy) velmi důležitá, protože umožňuje provést na množině, na níž je definována, tzv. <u>disjunktní rozklad</u>. Nechť R je relace ekvivalence na množině A . Pro každý prvek $x \in A$ sestrojme množinu M_x všech prvků množiny A , které jsou s x v relaci R

(tj. $M_x = \{ y \mid x R y \}$).

Ukazuje se, že jsou-li dva prvky x, y v relaci R , pak jim přiřazené množiny M_x , M_y jsou stejné, tj. $M_x = M_y$. Jestliže však prvky x, y nejsou v relaci R , pak množiny M_x , M_y nemají žádný společný prvek čili jsou disjunktní ($M_x \cap M_y = \emptyset$) . Přitom každý prvek množiny A leží v některé takové množině (každý prvek x leží totiž vzhledem k reflexivnosti v množině M_x). Všechny množiny M_x pro všechna $x \in A$ dohromady tvoří tzv. disjunktní rozklad množiny A ; každá množina M_x se nazývá <u>třídou</u> tohoto <u>rozkladu</u>. Tento rozklad je charakterizován tím, že

1) každý prvek množiny A patří do některé třídy rozkladu,

2) žádný prvek množiny A nepatří do více tříd rozkladu současně, což bychom mohli shrnout jediným tvrzením

1) + 2) každý prvek množiny A patří do jediné třídy rozkladu.

Například pro relaci

$$"\, x \text{ je synonymum } y \,"$$

sestává množina M_x ze všech slov, která jsou synonymní s x. To znamená, že tato relace rozkládá množinu slov A na vzájemně disjunktní třídy, z nichž každá je složena ze synonymních slov. Některé z těchto tříd mohou obsahovat jen jediný prvek (jestliže totiž příslušné slovo nemá kromě sebe samého žádná jiná synonyma).

U relace

$$"\, x \text{ se skloňuje podle stejného vzoru jako } y \,"$$

je každá třída M_x tvořena všemi substantivy, která se skloňují podle stejného vzoru. Disjunktní rozklad množiny všech substantiv pomocí této relace sestává proto z tolika tříd, kolik je vzorů pro skloňování.

<u>Cvičení 13</u>. Zjistěte, jak vypadají třídy rozkladu pro jednotlivé relace ekvivalence z předcházejícího cvičení.

Jinou významnou relací je <u>relace částečného uspořádání</u>. K její definici potřebujeme ještě pojem <u>antisymetrické</u> relace. Relace R se nazývá antisymetrickou, jestliže pro všechna $x \in A$, $y \in A$,

$$\text{jestliže } xRy \text{ a } yRx \text{, pak } x = y \,.$$

(Můžeme to říci také tak, že je-li $x \neq y$, pak nemůže platit xRy i yRx současně; slovo "antisymetrická" označuje jistý druh relace a neznamená, že jde o jakoukoliv relaci, která není symetrická.)

Relace R na množině A se nazývá relací <u>částečného</u>

uspořádání na A , jestliže je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Snadno se přesvědčíme, že relace nerovnosti mezi čísly

$$" x \leq y "$$

je relací částečného uspořádání na množině všech čísel. Ze tří základních vlastností inkluze plyne, že relace

$$" A \subset B "$$

je rovněž relací částečného uspořádání. Podobně je relací částečného uspořádání i každá z relací

"událost x neproběhla později než událost y "

" x není starší než y " ,

avšak není jí relace

" x je starší než y ",

která není reflexivní.

Jiným příkladem částečného uspořádání je uspořádání slov ve slovníku (např. českém). Definice relace R zde je však obtížnější. Nechť A je množina českých slov. Relaci

"slovo x předchází ve slovníku slovo y "

definujeme takto: tato relace nastává mezi slovy x, y tehdy, jestliže buď a) první písmeno slova x předchází v české abecedě první písmeno slova y , nebo b) slovo y začíná slovem x , nebo c) písmena na prvním až n-tém místě obou slov jsou stejná a $(n+1)$-ní písmeno slova x předchází v české abecedě $(n+1)$-ní písmeno slova y .

V naší definici částečného uspořádání nebyla zahrnuta podmínka

pro každé dva prvky x, y množiny A buď $x R y$ nebo $y R x$.

Je-li R relací částečného uspořádání a splňuje navíc tuto podmínku, pak R nazýváme relací úplného (někdy: lineárního) uspořádání. Například relace nerovnosti mezi čísly

$$" x \leq y "$$

je relací úplného uspořádání, protože je dobře známo, že pro libovolná dvě čísla x, y je buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$. Avšak relace

$$" A \subset B ",$$

která, jak víme, je relací částečného uspořádání, není relací úplného uspořádání, protože snadno nalezneme množiny A, B, které nesplňují ani vztah $A \subset B$, ani vztah $B \subset A$.

Existuje-li prvek $a \in A$ takový, že pro každé $x \in A$ je $x R a$, nazýváme jej největším prvkem množiny A v částečném uspořádání R. Například největším prvkem v relaci

"slovo x předchází ve slovníku slovo y "

je poslední slovo ve slovníku, zatímco v množině čísel největší prvek v částečném uspořádání "$x \leq y$" neexistuje.

Cvičení 14. **Nechť R je relace částečného uspořádání na A. Je pravda, že pro každé dva prvky $x \in A$, $y \in A$ je buď $x R y$ nebo $y R x$?**

Pomocí pojmů z teorie množin můžeme definovat v nejobecnější formě i pojem funkce (neboli funkční závislosti), který v dnešní době pronikl už do terminologie takřka všech vědeckých disciplín. Funkcí rozumíme jistý způsob, kterým se každému prvku z určité množiny A přiřazuje prvek jiné množiny B. Množina B se nazývá definiční obor funkce, množina B

je obor hodnot funkce. Příklady:

1) A i B je množina čísel a funkce přiřazuje každému číslu x číslo $2x+1$,

2) přiřadíme-li každému občanu Československa jeho rodné číslo, dostaneme funkci,

3) každému výroku můžeme přiřadit v závislosti na tom, zda je či není pravdivý, číslo 1 nebo 0; zde množina A je množinou všech výroků, kdežto B sestává pouze ze dvou prvků $0, 1$,

4) přiřadíme-li každému českému slovu číslo, které určuje počet jeho písmen, utvořili jsme tím funkci, jejímž definičním oborem je množina českých slov a oborem hodnot množina kladných celých čísel,

5) každému písmenu české abecedy lze připsat jisté číslo, vyjadřující frekvenci (v %) výskytu tohoto písmena v českém jazyce; definičním oborem této funkce je množina písmen české abecedy, oborem hodnot množina všech čísel (nejen celých) od 0 do 100.

Všechny tyto příklady mají při vší své rozmanitosti společné dvě věci: že totiž každému prvku množiny A je přiřazen jediný prvek množiny B (čili jednomu prvku množiny A nemůže být přiřazeno více prvků množiny B; například každému výroku je přiřazeno některé z čísel $0, 1$, ale žádnému z nich nejsou přiřazena obě). Můžeme proto naši původní formulaci zpřesnit: funkcí rozumíme předpis (přiřazení), který každému prvku množiny A - jíž se říká definiční obor - přiřazuje jediný prvek množiny B (oboru hodnot). Funkci obvykle značíme písmenem f. Chceme-li vyznačit skutečnost, že A je definičním oborem a B oborem hodnot této funkce, píšeme

$$f : A \rightarrow B .$$

Prvek množiny B, který je funkcí f přiřazen prvku $x \in A$, značíme $f(x)$ a nazýváme ho <u>obrazem</u> prvku x nebo <u>funkční hodnotou</u> funkce f v bodě x. Množinu všech prvků množiny B, které jsou obrazem některého prvku množiny A, značíme $f(A)$; tato množina nemusí pokrývat celou množinu B, jak se můžeme přesvědčit z příkladu 5).

V naší definici funkce figuruje ještě blíže nezpřesněný pojem "předpis", který z ní můžeme zcela odstranit použitím kartézského součinu. Jelikož funkce je zadána, jsou-li známy množiny A, B a předpis, přiřazující každému prvku $x \in A$, jeho obraz $y = f(x)$, můžeme ji zadat tak, že zadáme množiny A, B a množinu F uspořádaných dvojic (x, y) takových, že y je obrazem x. Množina F je pak částí kartézského součinu $A \times B$ (tj. $F \subset A \times B$). Na rozdíl od relace nemůže však množina F být libovolná, ale musí mít tuto vlastnost: pro každý prvek x množiny A existuje v množině F jediná uspořádaná dvojice, na jejímž prvním místě stojí x (na druhém místě této uspořádané dvojice pak stojí prvek množiny B, který je obrazem prvku x). Například, je-li

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$F = \{(a, 2), (b, 4), (c, 6), (d, 3))\} ,$$

pak tyto tři množiny určují funkci f s definičním oborem A a oborem hodnot B takovou, že $f(a) = 2$, $f(b) = 4$, $f(c) = 6$, $f(d) = 3$. Kdyby však při stejných množinách A, B měla množina F tvar

$$F = \{(a, 2), (b, 4), (d, 3)\} ,$$

pak množiny A, B, F by nezadávaly funkci, protože k prvku

$c \in A$ neexistuje v F příslušná dvojice.

Jestliže funkce

$$f : A \longrightarrow B$$

přiřazuje různým prvkům množiny A různé prvky množiny B, tj. jestliže pro libovolné prvky $x \in A$, $y \in A$ platí

$$x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y),$$

říkáme, že funkce f je <u>prostá</u>.

Funkce z příkladu 2) je prostá, protože různí občané mají různá rodná čísla, avšak funkce z příkladu 3) není prostá, protože všem pravdivým výrokům je přiřazena stejná funkční hodnota

Pomocí zákona obrácení implikace $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p))$ můžeme definici zformulovat ekvivalentně takto: funkce f je prostá, jestliže pro libovolné prvky $x \in A$, $y \in A$ platí

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

(jsou-li obrazy dvou prvků stejné, pak i tyto prvky jsou stejné).

Tato formulace nám umožňuje dokázat, že funkce z příkladu 1) je prostá. Zde $f(x) = 2x + 1$. Předpokládejme, že $f(x) = f(y)$, čili $2x + 1 = 2y + 1$. Jednoduchými úpravami této rovnosti dostáváme postupně $2x = 2y$, $x = y$, což znamená, že funkce f je prostá.

Je-li každý prvek množiny B obrazem některého prvku množiny A, pak říkáme, že funkce zobrazuje množinu A <u>na</u> množinu B. Příkladem takové funkce je funkce z příkladu 3), protože každé z čísel $0, 1$ je přiřazeno některému výroku. Funkce z příkladu 5) nezobrazuje abecedu na množinu všech čísel od 0 do 100, protože např. číslo 100 není obrazem žádného písmena (žádné písmeno nemá 100 %ní frekvenci).

Jestliže funkce

$$f: A \longrightarrow B$$

je prostá a současně zobrazuje množinu A na množinu B, říkáme, že funkce f je vzájemně jednoznačná (někdy též jedno-jednoznačná, z angl. one-to-one mapping). V takovém případě jsou si prvky množin A, B touto funkcí vzájemně po dvou přiřazeny tak, že každý prvek každé z obou množin je přiřazen jedinému prvku druhé množiny, jak to vysvítá z následujícího obrázku

$$\begin{array}{l} a \longrightarrow 1 \\ b \longrightarrow 2 \\ c \longrightarrow 3 \\ d \longrightarrow 4 \end{array}$$

který znázorňuje vzájemně jednoznačnou funkci, definovanou na množině $A = \{a, b, c, d\}$ a s oborem hodnot $B = \{1, 2, 3, 4\}$ předpisem $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$. Jsou-li množiny A, B konečné (což je pro nás nejdůležitější případ, protože s nekonečnými množinami se v lingvistice setkáme jen zřídka), pak vzájemně jednoznačná funkce s definičním oborem A a oborem hodnot B existuje jen tehdy, mají-li množiny A, B stejný počet prvků.

Je-li funkce

$$f: A \longrightarrow B$$

vzájemně jednoznačná, lze pomocí ní sestavit novou funkci s definičním oborem B a oborem hodnot A (tedy opačně, než u funkce f), zvanou inverzní funkcí k funkci f ; značí se f^{-1} (někdy f_{-1}). Je definována takto: pro každý prvek x množi-

ny B (jejího definičního oboru) je funkční hodnotou $f^{-1}(x)$ ten prvek y množiny A, pro který je $f(y) = x$.
To znamená, že jestliže bylo $f(y) = x$, pak je $y = f^{-1}(x)$.
Ukážeme, jak se sestrojuje inverzní funkce pro poslední uvedený příklad. Zde je $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Podle definice má být $f^{-1}(1)$ ten prvek y množiny A, pro který $f(y) = 1$.
Protože $f(a) = 1$, je $y = a$, takže $f^{-1}(1) = a$. Podobně bychom dostali $f^{-1}(2) = b$, $f^{-1}(3) = c$, $f^{-1}(4) = d$. Grafické znázornění funkce f^{-1} vznikne tedy z grafického znázornění funkce f pouhou změnou směru šipek:

$$\begin{array}{l} a \longleftarrow 1 \\ b \longleftarrow 2 \\ c \longleftarrow 3 \\ d \longleftarrow 4 \end{array}$$

Jsou-li dány dvě funkce

$$f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow C,$$

kde obor hodnot první funkce (množina B) je definičním oborem druhé funkce, můžeme z nich sestrojit novou funkci, které se říká <u>složená funkce</u> a značí se gf, tímto předpisem: vezměme $x \in A$, pak $f(x) \in B$; jelikož B je definiční obor g, přiřazuje funkce g prvku $f(x)$ jistý prvek množiny C, totiž prvek $g(f(x))$ a tento prvek budeme považovat za hodnotu složené funkce gf v bodě x. Konstrukce složené funkce vysvitne lépe z tohoto příkladu:

a)

$$\begin{array}{l} a \longrightarrow 1 \longrightarrow k \\ b \longrightarrow 2 \longrightarrow l \\ c \longrightarrow 3 \longrightarrow m \\ d \longrightarrow 4 \longrightarrow n \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & k \\ b & \longrightarrow & l \\ c & \longrightarrow & m \\ d & \longrightarrow & n \end{array}$$

(Zde je $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{k, l, m, n\}$, funkce $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ jsou znázorněny v části a), složená funkce $gf : A \longrightarrow C$ v části b).)

Všimněme si, že $gf : A \longrightarrow C$, takže množina B je jen jakýmsi "meziproduktem" při tvoření složené funkce, ale ve výsledku se neobjeví.

Jsou-li funkce $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ vzájemně jednoznačné, je i funkce $gf : A \longrightarrow C$ vzájemně jednoznačná a pro inverzní funkce k těmto funkcím platí vztah

$$(gf)^{-1} = f^{-1} g^{-1}$$

(tj. inverzní funkce ke složené funkci vznikne složením jednotlivých inverzních funkcí v opačném pořadí). Můžeme jej ilustrovat na předchozím obrázku, jestliže v obou jeho částech obrátíme pořadí šipek. Funkce $(gf)^{-1}$ pak bude znázorněna v části b), funkce $f^{-1} g^{-1}$ v části a).

Je-li

$$f : A \longrightarrow A ,$$

tj. je-li obor hodnot funkce A roven jejímu definičnímu oboru, říkáme, že funkce f zobrazuje množinu A do sebe. Zobrazuje-li f množinu A do sebe a je-li navíc vzájemně jednoznačnou funkcí, říkáme, že f je transformace množiny A. Příkladem transformace může být např. funkce, znázorněná na následujícím obrázku:

$$\begin{array}{l} a \longrightarrow b \\ b \longrightarrow c \\ c \longrightarrow a \end{array}$$

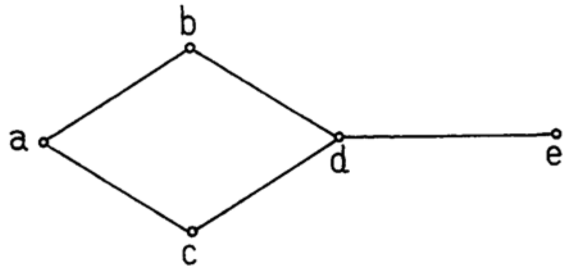
Dá se dokázat, že platí: 1) je-li f transformace množiny A, pak i f^{-1} je transformace množiny A, 2) jsou-li f, g dvě transformace množiny A, pak i složená funkce fg je transformace množiny A. Mezi všemi transformacemi množiny A existuje jedna, která je ze všech nejjednodušší: je to tzv. identická transformace e, což je funkce, která každému prvku $x \in A$ přiřazuje opět x : $e(x) = x$. Pro každou transformaci f platí vlastnost 3) $f^{-1}f = e$.

<u>Cvičení 15</u>. Znázorněte vlastnosti 1), 2), 3) graficky na množině $A = \{a, b, c\}$ (vyberte si dvě libovolné transformace f, g této množiny a znázorněte graficky f^{-1}, gf, $f^{-1}f$).

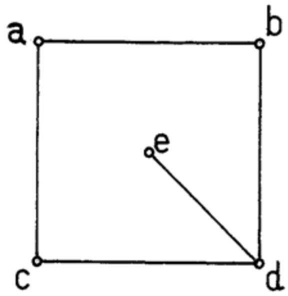
5. Grafy

V předchozím textu jsme již několikrát použili výrazu "grafické znázornění", s nímž se dnes můžeme často setkat i v jiných oborech. V tomto oddílu pojednáme o matematické definici grafu a o některých jeho vlastnostech. Avšak tím, že matematika přesně vymezuje obsah pojmu "graf", zúžuje poněkud jeho rozsah, takže ne všechno, co intuitivně nazýváme grafem, je skutečně grafem ve smyslu jeho matematické definice.

Dříve než uvedeme definici (matematického) grafu, řekneme si, jak tento objekt znázorňujeme. Graf, znázorněný na papíře, sestává z několika bodů, zvaných uzly, z nichž některé jsou po dvou spojeny mezi sebou úsečkami (řidčeji, vyžaduje-li toho názornost, křivkami), zvanými hrany grafu. Například obrazec



znázorňuje graf s uzly a, b, c, d, e a hranami ab, ac, bd, cd, de. Není přitom podstatné, v jaké vzájemné poloze jsou vůči sobě na papíře uzly grafu zobrazeny, protože rozhodující pro vlastnosti grafu není prostorová poloha jeho uzlů, ale to, které dvojice uzlů jsou spolu spojeny. Uvedený graf bychom tedy mohli znázornit například takto:



Hranu, spojující uzly a, b můžeme považovat za dvojici, sestávající z prvků a, b (jedná se o neuspořádanou dvojici, protože žádný z uzlů, spojených hranou, není preferován), tedy za množinu $\{a, b\}$. Pak je možno vyslovit definici grafu:

Graf je určen dvěma množinami V, H, přičemž prvky množiny V se nazývají uzly a množina H sestává z některých dvojic (neuspořádaných) uzlů; tyto dvojice se nazývají hrany grafu.

Výšeuvedený graf je tedy určen množinami

$V = \{a, b, c, d, e\}$,

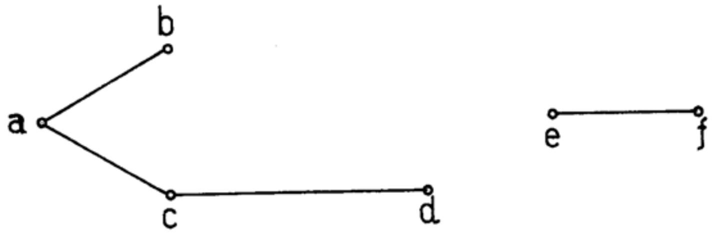
$H = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$.

Vzhledem k tomu, že graf považujeme za jeden objekt, který je určen dvěma množinami, je vhodné vyjádřit jej jednou množinou. Z toho důvodu se obvykle místo dvou množin V, H hovoří o jedné množině (V, H), takže říkáme, že graf je uspořádaná dvojice, na jejímž prvním místě stojí množina uzlů a na druhém místě množina hran. Tohoto způsobu vyjadřování se však používá pouze v teoretických textech a my jej zde přímo nepoužijeme; uvedli jsme tento způsob pouze pro informaci, neboť se s ním je možno v matematice často setkat.

Jako klasický příklad grafu můžeme uvést mapu železničních spojů ČSD. Tento příklad nám současně poslouží jako ilustrace důležitého pojmu z teorie grafů, totiž pojmu cesty (neboli spojnice). Říkáme, že dva uzly a, b grafu G jsou spojeny cestou (nebo že existuje cesta od a do b), jestliže z uzlu a je do uzlu b možno "dojít" po hranách tohoto grafu. V tomto smyslu existuje na mapě železničních spojů ČSD cesta z Prahy do Tábora, neboť je tam možno "dojít" po hranách (Praha-Čerčany, Čerčany-Benešov u Prahy, Benešov u Prahy-Olbramovice, Olbramovice-Tábor) tohoto grafu.

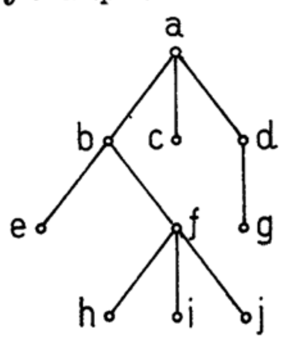
Má-li graf tu vlastnost, že z libovolného jeho uzlu existuje cesta do každého jiného uzlu, říkáme, že tento graf je souvislý. Například graf, znázorněný výše, je souvislý, neboť z každého jeho uzlu je možno "dojít" do každého ze zbývajících uzlů. Naproti tomu graf, znázorněný mapou ČSD, není souvislý, neboť lanovkové dráhy (např. Oldřichovice-Javorový vrch) jsou v něm znázorněny bez návaznosti na železniční síť, takže v něm např. neexistuje cesta z Javorového vrchu do Českého Těšína. Jestliže však lanovkové dráhy vyloučíme, bude zbytek souvislým grafem. Každý strukturní vzorec organické sloučeniny, v němž se nevyskytují dvojné nebo trojné vazby, je rovněž souvislým grafem.

Jestliže graf G není souvislý, je možné jej rozdělit na několik disjunktních grafů (tj. grafů, které nemají společné žádné uzly ani hrany), které jsou souvislé. Například graf



je možno zřejmým způsobem rozdělit na dva grafy, z nichž první má uzly a, b, c, d a druhý uzly e, f ; každý z těchto grafů je souvislý a přitom jsou vzájemně disjunktní.

Grafy, s nimiž se setkáváme v praxi, jsou obvykle souvislé. Většina z nich má však ještě další vlastnost, která je zvláště důležitá z hlediska matematické lingvistiky. Jde o grafy, ve kterých mezi libovolnými dvěma uzly existuje <u>jediná</u> cesta. Takovým grafům říkáme <u>stromy</u>. Rozdíl mezi souvislým grafem a stromem je následující: v souvislém grafu existuje mezi libovolnými dvěma uzly a, b cesta, avšak takových cest může být více, zatímco ve stromu je taková cesta jenom jedna. Příkladem stromu může být např. tento graf:



Graf železničních spojů není stromem, neboť v naprosté většině případů máme teoretickou možnost vybrat si z několika cest, jež vedou z uzlu a do uzlu b (např. z Prahy do Brna přes Českou Třebovou nebo přes Havlíčkův Brod, ale třeba i přes Plzeň a České Budějovice).

<u>Cvičení 16</u>. Nakreslete graf, jehož množina uzlů je $V = \{u, v, x, y, z\}$ a množina hran $H = \{\{u, v\}, \{y, z\}, \{v, x\}, \{z, u\}, \{x, y\}\}$. Zjistěte, zda je tento graf souvislý a zda je stromem.

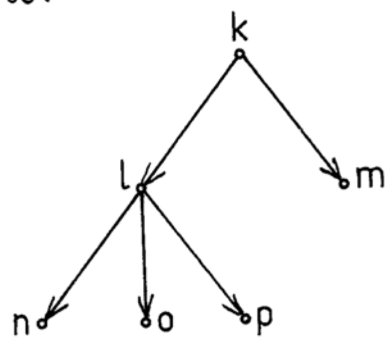
Kromě grafů, o nichž jsme se dosud zmínili, existují ještě tzv. <u>orientované grafy</u>, které se liší od obyčejných grafů tím, že každá jejich <u>hrana</u> je <u>orientovaná</u>, tj. je určeno, který z obou uzlů, spojených touto hranou, je první a který je druhý. V definici se tento rozdíl projeví pouze v tom, že hrany orientovaného grafu jsou uspořádané dvojice uzlů. Orientovanou hranu (a, b) znázorňujeme šipkou, která vychází z a a směřuje do b.

Příkladem orientovaného grafu může být například graf

$V = \{k, l, m, n, o, p\}$,

$H = \{(k, l), (k, m), (l, n), (l, o), (l, p)\}$,

který znázorníme takto:



Rovněž u orientovaného grafu je možno podat definice souvislosti a stromu, nebudeme je však uvádět.

6. Úvod do matematické lingvistiky

Jak již bylo řečeno v předmluvě, tato skripta nejsou učebnicí matematické lingvistiky, takže její stručný nástin, který zde podáváme, má pouze informativní charakter.

Především zavedeme pojem abecedy. Abeceda je libovolná neprázdná konečná množina symbolů. Příklady abeced: velká latinská abeceda $\{A,B,C,\dots,Z\}$, malá řecká abeceda $\{\alpha,\beta,\dots,\omega\}$, binární abeceda $\{0,1\}$. Je-li dána nějaká abeceda V, pak jakoukoliv konečnou posloupnost symbolů této abecedy nazýváme slovem nad touto abecedou (někdy též řetězem, větou). Například každý z výrazů ALE, AAAAA, KLKLMKL je slovem nad velkou abecedou (není řečeno, že takováto posloupnost symbolů musí být slovem ve smyslu českého jazyka). Množinu všech možných slov, utvořených ze symbolů abecedy V, značíme V^* (V s hvězdičkou).

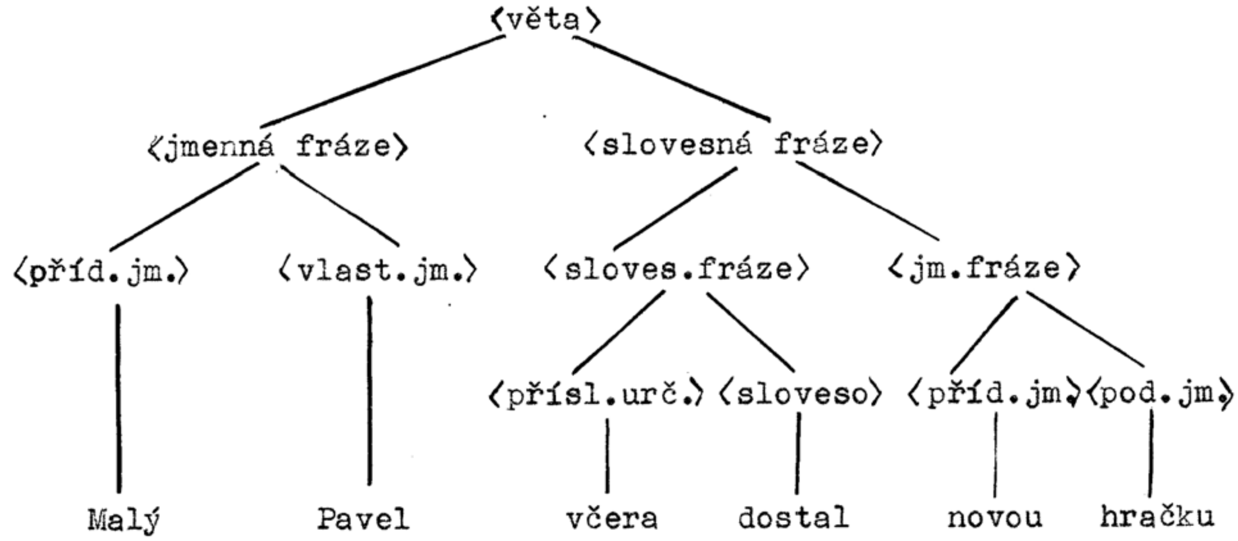
Protože abeceda V může podle naší definice být složena z jakýchkoli symbolů, můžeme za množinu V vzít například množinu všech slov českého jazyka. Potom množina V^* sestává ze všech možných konečných posloupností slov českého jazyka. Jistě se mezi nimi vyskytují všechny věty českého jazyka, ale kromě nich také mnoho jiných zcela náhodně seřazených posloupností slov. K formálnímu rozlišení správně vytvořených vět jazyka od náhodných seskupení slov slouží gramatika, k jejíž definici přejdeme.

Myšlenka matematické definice gramatiky - budeme si zde všímat jen jednoho druhu, totiž tzv. generativních gramatik -

je založena na dobře známém postupu větného rozboru. Uveďme nejprve příklad. Větu

"Malý Pavel včera dostal novou hračku"

můžeme rozložit na jmennou frázi (malý Pavel) a slovesnou frázi (dostal včera novou hračku). Jmennou frázi "malý Pavel" lze rozložit na přídavné jméno (malý) a vlastní jméno (Pavel), kdežto slovesná fráze se dá rozložit opět na slovesnou frázi (včera dostal) a jmennou frázi (novou hračku); slovesná fráze "včera dostal" se skládá z příslovečného určení (včera) a slovesa (dostal), jmenná fráze z přídavného (novou) a podstatného jména (hračku). Celý tento postup můžeme ilustrovat tímto grafem:



Uzly tohoto grafu jsou dva druhy symbolů: jednak slova zvolené věty (resp. jazyka), jako malý, včera atd., jimž budeme v dalším říkat <u>terminální</u> symboly, jednak slova označující gramatické kategorie, která jsou pro odlišení dána do hranatých závorek; v dalším jim budeme říkat <u>neterminální</u> symboly. Dále z každého neterminálního symbolu vychází směrem dolů jedna nebo více hran, na jejichž koncích stojí symboly, na něž je možno daný neterminální symbol rozložit. Každému takovému způsobu rozkladu se říká <u>přepisovací pravidlo</u>. V našem příkladě se vyskytují tato přepisovací pravidla (značíme je šipkou, na jejímž levém konci stojí symbol, který se přepisovacím pravidlem rozkládá, na pravém konci symboly, na něž se rozkládá neboli přepisuje): <věta> ⟶ < jmenná fráze > < slovesná fráze >, < jmenná fráze > ⟶ < přídavné jméno > < vlastní jméno >, < slovesná fráze > ⟶ < slovesná fráze > < jmenná fráze >, < slovesná fráze > ⟶ < přísl. urč. > < sloveso > , <jmenná fráze > ⟶ < příd.jm. > < podst.jm. >, <přídavné jméno > ⟶ malý, <vlastní jméno> ⟶ Pavel, <přísl. urč. > ⟶ včera, < sloveso > ⟶ dostal, <příd.jm. > ⟶ novou, < podst.jm. > ⟶ hračku. Dále na začátku grafu (zcela nahoře) stojí význačný (dalo by se říci: nejobecnější) symbol < věta > , který se nazývá <u>počátečním</u> symbolem.

Nyní již můžeme vyslovit obecnou definici <u>generativní gramatiky</u>. Skládá se ze čtyř objektů: abecedy neterminálních symbolů V_N , abecedy terminálních symbolů V_T , množiny přepisovacích pravidel P a počátečního symbolu S . Předpokládá se, že množiny V_N a V_T nemají žádný společný prvek (tj. že $V_N \cap V_T = \emptyset$), protože žádný symbol nemůže být současně neterminálním i terminálním symbolem, jinak by docházelo k nedorozuměním. Přepisovací pravidla mají tvar $\alpha \longrightarrow \beta$, kde α i β jsou posloupnosti symbolů z obou abeced V_N , V_T (tj. v každém ze slov α, β se mohou vyskytovat jak symboly abecedy V_N , tak i abecedy V_T). Počáteční symbol S patří vždy do abecedy neterminálních symbolů, tj. $S \in V_N$.

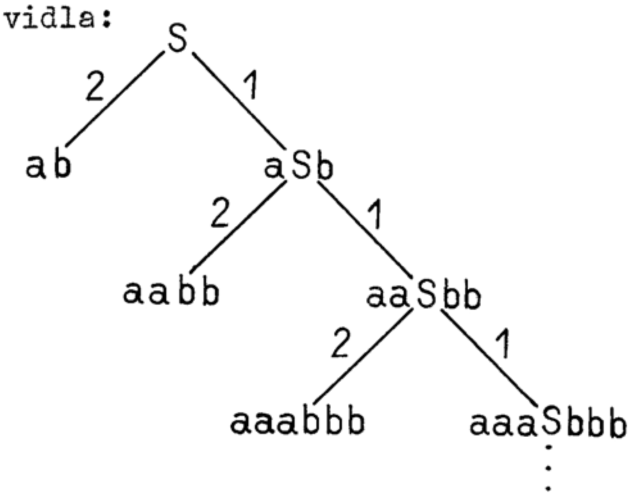
<u>Příklad</u>. Nechť $V_N = \{S\}$ (tj. abeceda neterminálních symbolů obsahuje pouze jeden prvek), $V_T = \{a, b\}$,

$P = \{S \longrightarrow aSb,\ S \longrightarrow ab\}$ (tj. přepisovací pravidla jsou $S \longrightarrow aSb$, $S \longrightarrow ab$). Těmito množinami je dána jistá gramatika.

Základní myšlenka generativní gramatiky spočívá v tom, že vyjdeme od počátečního symbolu S a pomocí přepisovacích pravidel z něj postupně vytváříme posloupnosti, složené ze symbolů abeced V_N , V_T tak dlouho, až dojdeme k posloupnostem, které jsou složeny pouze z terminálních symbolů, čili jsou to slova nad abecedou V_T . Všechna takováto slova nad abecedou V_T , k nimž uvedeným způsobem dospějeme, tvoří jazyk, generovaný danou gramatikou.

Přepisovacích pravidel používáme následujícím způsobem. Je-li $\alpha \longrightarrow \beta$ přepisovací pravidlo dané gramatiky, pak z každé posloupnosti symbolů, v níž je obsažena posloupnost α, je povoleno utvořit novou posloupnost tím, že v původní posloupnosti celou posloupnost α nahradíme posloupností β. Je-li např. v nějaké gramatice $xAy \longrightarrow xB$ přepisovacím pravidlem, pak slovo $auxAyv$, které obsahuje posloupnost xAy , je možno pomocí tohoto pravidla přepsat na slovo $auxBv$.

V našem předchozím příkladě máme jediný neterminální symbol S a dvě přepisovací pravidla $S \longrightarrow aSb$, $S \longrightarrow ab$. Vyjdeme-li ze symbolu S a použijeme druhého pravidla, přepíšeme jej na slovo ab , které obsahuje pouze terminální symboly, takže je slovem jazyka, generovaného touto gramatikou. Použijeme-li na počáteční symbol S prvního pravidla, přepíšeme jej na slovo aSb . Symbol S , který se v něm vyskytuje, můžeme opět přepsat pomocí druhého nebo prvního pravidla; dostaneme tím $aabb$ resp. $aaSbb$. Slovo $aaSbb$ je opět možno přepsat každým z obou pravidel, čímž dostáváme $aaabbb$ resp. $aaaSbbb$. Tento postup je možno opakovat neomezeně. Graficky jej můžeme znázornit následujícím stromem, v němž u každé hrany je uvedeno číslo přepisovacího pravidla:



Jsou-li γ, δ dvě posloupnosti symbolů takové, že δ vznikne z γ aplikací jednoho přepisovacího pravidla z gramatiky G , píšeme $\gamma \underset{G}{\Longrightarrow} \delta$. Jestliže posloupnosti γ, δ jsou stejné ($\gamma = \delta$) nebo jestliže posloupnost δ vznikla z γ několikanásobným použitím různých přepisovacích pravidel, píšeme $\gamma \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \delta$ (symbol " $\Longrightarrow$ " zde neznamená implikaci, jde pouze o náhodnou podobnost). Je-li α slovo, složené pouze z terminálních symbolů, generované gramatikou G , pak, jak víme, vzniklo z počátečního symbolu S několikanásobným použitím přepisovacích pravidel, takže $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha$. Označíme-li jazyk, generovaný gramatikou G , symbolem $L(G)$, můžeme psát

$$L(G) = \{\alpha \mid \alpha \in (V_T)^* \wedge S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha\} .$$

Podle tvaru přepisovacích pravidel třídíme gramatiky na kontextové, bezkontextové a regulární. <u>Kontextová</u> gramatika má přepisovací pravidla tvaru $\alpha A \beta \longrightarrow \alpha \omega \beta$, kde A je neterminální symbol, α, β, ω slova, složená z terminálních i neterminálních symbolů. Každé pravidlo kontextové gramatiky umožňuje tedy přepsat neterminální symbol na jisté slovo (v našem případě A na ω), ale ne vždy, nýbrž pouze tehdy, je-li symbol A v kontextu určených slov α, β . Naproti tomu <u>bezkontextová</u> gramatika má přepisovací pravidla tvaru $A \longrightarrow \omega$, umožňuje tedy přepsat neterminální symbol A na posloupnost ω kdykoliv, nezávisle na kontextu. Gramatika je <u>regulární</u>, jestliže každé její přepisovací pravidlo je buď tvaru $A \longrightarrow aB$ nebo $A \longrightarrow b$, kde A, B jsou neterminální symboly, a, b terminální symboly.

Regulární gramatiky jsou spíše teoretického charakteru, používají se v teorii reprezentací gramatik automaty. Pro popis přirozených jazyků se používá bezkontextových gramatik, které jsou také nejpodrobněji prozkoumány z teoretického hlediska. Dosud se však vedou diskuse o tom, zda bezkontextová gramatika je skutečně adekvátním prostředkem popisu přirozeného jazyka a zda k jeho podrobnějšímu a přesnějšímu popisu nebude nutno použít i kontextových gramatik.

Tím končíme náš krátký úvod do matematické lingvistiky. Informace o literatuře nalezne čtenář na konci skript.

<u>Cvičení 17</u>. Rozhodněte, zda množiny neterminálních symbolů $V_N = \{A, B\}$ terminálních symbolů $V_T = \{a, b\}$ přepisovacích pravidel $P = \{A \longrightarrow Ba, B \longrightarrow ab\}$ a počáteční symbol S tvoří gramatiku.

<u>Cvičení 18</u>. Je dána gramatika $V_N = \{S, B, C\}$, $V_T = \{a, b, c\}$, $P = \{S \longrightarrow aSBC, S \longrightarrow aBC, CB \longrightarrow BC, aB \longrightarrow ab, bB \longrightarrow bb,$

$bC \longrightarrow bc$, $cC \longrightarrow cc\}$. Ukažte, že slova abc, $aabbcc$ patří do jazyka, generovaného touto gramatikou.

Cvičení 19. Sestavte gramatiku, která by generovala jazyk, jehož jediným terminálním symbolem je písmeno " a " a který sestává ze všech slov tvaru a, aa, aaa, $aaaa$ atd.

Cvičení 20. Rozhodněte, ke kterému z uvedených tří typů gramatik patří gramatika ze cvič. 18.

Výsledky cvičení.

Cvičení 1. 1) konjunkce, 2) implikace, 3) disjunkce.

Cvičení 2.) 1) $(\neg(p \wedge q)) \Longrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$,
2) $p \wedge ((\neg q) \Longrightarrow r)$.

Cvičení 3. Výrokovými formulemi nejsou výrazy 3) (nelze psát $\neg \vee$, protože za symbolem negace musí stát výrok) a 5) (mezi výroky p, q není spojka).

Cvičení 4.

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$	$\neg(p \wedge (\neg p))$	$\neg(\neg p)$	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	$p \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1

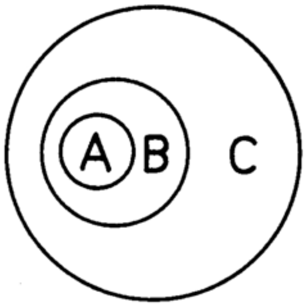
Cvičení 5. Všechny formule, kromě čtvrté, jsou výrokovými zákony.

Cvičení 6.

$(\forall x)(\forall y)$	(x obdivuje y)	"každý obdivuje každého"
$(\forall x)(\exists y)$	"	"každý někoho obdivuje"
$(\exists x)(\forall y)$	"	"existuje člověk, který obdivuje každého"
$(\exists x)(\exists y)$	"	"existuje člověk, který někoho obdivuje"
$(\forall y)(\forall x)$	"	"každý obdivuje každého"
$(\forall y)(\exists x)$	"	"každého někdo obdivuje"
$(\exists y)(\forall x)$	"	"existuje člověk, kterého obdivují všichni"
$(\exists y)(\exists x)$	"	"existuje člověk, kterého někdo obdivuje"

Cvičení 7. 1) Máme dokázat $A \subset C$, tj. že pro každé $x \in A$ je $x \in C$. Nechť tedy $x \in A$; pak, protože $A \subset B$, je $x \in B$ a z $B \subset C$ plyne, že $x \in C$.

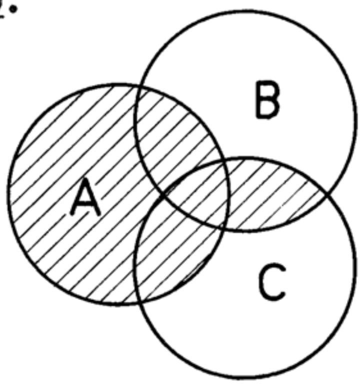
Náčrtek:



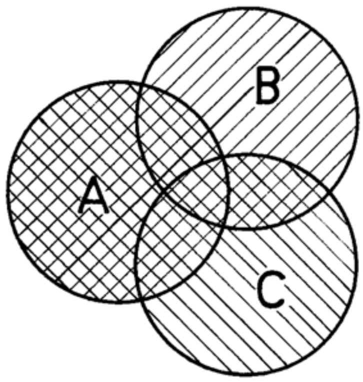
2) není

Cvičení 8. 1) ano, 2) ano, 3) ne, 4) ano, 5) ne, 6) ano, 7) ne

Cvičení 9.



$A \cup (B \cap C)$



$A \cup B$
$A \cup C$

Cvičení 10. 1) ano, 2) ne, 3) ano, 4) ne, 5) ano, 6) ano

Cvičení 11. 1) ne, 2) ano, 3) ano, 4) ne

Cvičení 12. 1) ano, 2) ano, 3) ano ($x - x = 0$, což je číslo, dělitelné dvěma; je-li $x - y$ dělitelné dvěma, pak číslo $y - x = -(x - y)$ je zase dělitelné dvěma; jsou-li čísla $x - y$, $y - z$ dělitelná dvěma, je i číslo $x - z = (x - y) + (y - z)$ dělitelné dvěma), 4) ne, protože není symetrická; avšak relace "události x, y se odehrály ve stejnou dobu" už je relací ekvivalence.

Cvičení 13. 1) Každá třída sestává ze všech lidí, kteří se narodili ve stejný den, 2) každá třída sestává ze všech vzájemně rovnoběžných přímek, 3) rozklad má pouze dvě třídy: sudých a lichých čísel.

Výsledky cvičení.

Cvičení 14. Není. Je-li např. A množina všech podmnožin nějaké aspoň dvouprvkové množiny M a R relace inkluze, pak R je relace částečného uspořádání, pro niž uvedený výrok neplatí (existují množiny B, C, pro něž neplatí ani $B \subset C$, ani $C \subset B$).

Cvičení 15. 1) je-li f dána obrázkem

$$\begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & b \\ b & \longrightarrow & c \\ c & \longrightarrow & a \end{array}$$

pak f^{-1} je dána obrázkem

$$\begin{array}{lcl} a & \longleftarrow & b \\ b & \longleftarrow & c \\ c & \longleftarrow & a \end{array} \qquad \text{po přerovnání} \qquad \begin{array}{lcl} a & \longrightarrow & c \\ b & \longrightarrow & a \\ c & \longrightarrow & b \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{lclcl} a & \xrightarrow{f} & b & \xrightarrow{g} & c \\ b & \longrightarrow & a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & c & \longrightarrow & a \end{array}$$

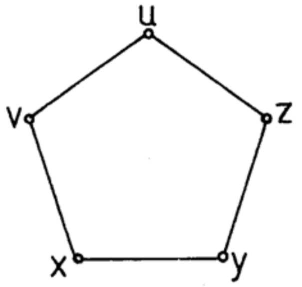
$$\begin{array}{lcl} a & \xrightarrow{\quad gf \quad} & c \\ b & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & a \end{array}$$

3)

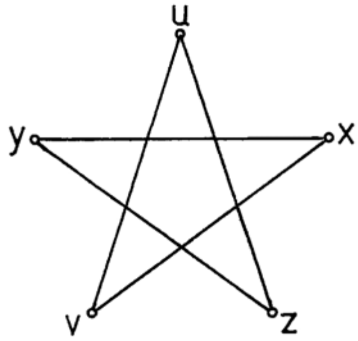
$$\begin{array}{lclcl} a & \xrightarrow{f} & c & \xrightarrow{f^{-1}} & a \\ b & \longrightarrow & a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & b & \longrightarrow & c \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} a & \xrightarrow{\quad f^{-1}f \quad} & a \\ b & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & c \end{array}$$

Cvičení 16.



nebo



Graf je souvislý, ale není stromem.

Cvičení 17. Netvoří, protože počáteční symbol S nepatří do V_N .

Cvičení 18. $S \underset{G}{\Longrightarrow} aBC \underset{G}{\Longrightarrow} abC \underset{G}{\Longrightarrow} abc$; $S \underset{G}{\Longrightarrow} aSBC \underset{G}{\Longrightarrow}$ $\underset{G}{\Longrightarrow} aaBCBC \underset{G}{\Longrightarrow} aabCBC \underset{G}{\Longrightarrow} aabBCC \underset{G}{\Longrightarrow} aabbCC \underset{G}{\Longrightarrow}$ $\underset{G}{\Longrightarrow} aabbcC \underset{G}{\Longrightarrow} aabbcc$.

Cvičení 19. $V_N = \{S\}$, $V_T = \{a\}$, $P = \{S \rightarrow a, S \rightarrow aS\}$, počáteční symbol S .

Cvičení 20. Kontextová.

Čtení symbolů.

$\neg p$	není pravda, že p
$p \wedge q$	p a q
$p \vee q$	p nebo q (nebo obojí)
$p \Longrightarrow q$	z p plyne q, p implikuje q, q je nutná podmínka pro p, p je postačující podmínka pro q.
$p \Longleftrightarrow q$	p je ekvivalentní q
$(\forall x)\, p(x)$	pro všechna x platí $p(x)$
$(\exists x)\, p(x)$	existuje x, pro které platí $p(x)$
$\{a, b, c\}$	množina, sestávající z prvků a, b, c
$\{x \mid p(x)\}$	množina těch x, pro která platí $p(x)$
$A \cap B$	průnik množin A, B
$A \cup B$	sjednocení množin A, B
$A - B$	rozdíl množin A, B
$A \times B$	kartézský součin množin A, B
$\{x, y\}$	dvojice x, y
(x, y)	uspořádaná dvojice x, y
$a R b$	a je v relaci R s b
$x \leq y$	x je menší nebo rovno y
$f: A \longrightarrow B$	f zobrazuje A do B (nebo: funkce f s definičním oborem A a oborem hodnot B)
$f(x)$	funkční hodnota funkce f v bodě x
f^{-1}	inverzní funkce k funkci f
gf	funkce, složená z funkcí f, g

Poznámky k literatuře.

Obsah prvních čtyř kapitol je podrobněji rozveden v knihách [1], [2] . Tarského kniha [1] je dnes již klasickou učebnicí logiky pro začátečníky; vyniká jasným a srozumitelným podáním. Kniha [2] je psána modernějším způsobem a pokrývá i některé oblasti matematiky, o nichž jsme se zde nezmínili. Zájemcům o filosofičtější přístup k teorii množin doporučujeme populárně psanou knihu [3] . Teorie grafů je soustavně vyložena v knize [4] . O generativních gramatikách pojednávají knihy [5] - [7] , zatímco známá Marcusova práce [8] se zabývá převážně jinou problematikou (morfémy, fonematický rozbor apod.), přičemž přes množství příkladů z přirozených jazyků je psána na dosti vysoké úrovni abstrakce. Horeckého skriptum [9] shrnuje stručně jednotlivé přístupy, včetně sémantických, jimž jsme zde pro jejich obtížnost nevěnovali pozornost.

Literatura.

[1] Tarski, A., Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd, NČSAV, Praha 1966.

[2] Kemeny, J.G., Snell, J.L., Thompson, G.L., Úvod do finitní matematiky, SNTL, Praha 1971.

[3] Vilenkin, N.J., Neznámý svět nekonečných množin, SNTL, Praha 1971.

[4] Ore, O., Teorija grafov, Nauka, Moskva 1968.

[5] Chomsky, N., Syntaktické struktury, NČSAV, Praha 1966.

[6] Gladkij, A.V., Melčuk, I.A., Elementy matematičeskoj lingvistiki, Nauka, Moskva 1969.

[7] Sgall, P., Generativní popis jazyka a česká deklinace, NČSAV, Praha 1967.

[8] Marcus, S., Algebraické modely v lingvistice, NČSAV, Praha 1969.

[9] Horecký, J., Úvod do matematickej jazykovedy, skriptum, Bratislava 1969.

MATEMATIKA PRO LINGVISTY
Jiří Rohn
Vydala Universita Karlova v Praze 1974, jako skriptum pro
posluchače matematicko-fyzikální fakulty
Vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 6, Praha 1
AA 3,68 — VA 3,80 — Vydání I. — Náklad 150 výtisků
Formát A4
MŠ č. 33421/62/VIII
60 - 60 - 74 17/31
Kčs 3,50

60 - 60 - 74 17/31 Kčs 3,50